ПРОФ. С. А. БОГОМОЛОВ

АКТУАЛЬНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

ГТТИ — 1934

УП

Проф. С. А. БОГОМОЛОВ

АКТУАЛЬНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

(ЗЕНОН ЭЛЕЙСКИЙ, ИС. НЬЮТОН, Г. КАНТОР)

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД — 1934 — МОСКВА

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командир., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Знаменитые *„апории“ Зенона Элейского* более 2000 лет привлекают к себе внимание ученых и философов; всё снова и снова стараются их опровергнуть. Автор этих строк, по мере сил, старался исследовать указанные вопросы и уже в третий раз возвращается к их решению *). Пройти мимо апорий Зенона, объявив их пустыми софизмами, было бы совершенно неправильно; здесь элейская школа с необыкновенной силой и глубиной критиковала возможность движения; а ведь понятие движения лежит в основе механики и через нее — в основе всей нашей техники. В математике оно превращается в понятие изменения переменных, лежащее в основе современного анализа; а так как рассуждения Зенона весьма тесно связаны с идеей бесконечности (в частности, — с бесконечным рядом), то интересы математики также оказываются весьма серьезно задетыми. Недаром известный историк нашей науки М. Кантор утверждает, что критика элейской школы задержала развитие греческой науки, в особенности — математики и механики.

---

*) „Аргументы Зенона Элейского при свете учения об актуальной бесконечности“ Журнал Мин. нар. просв., 1915.

„Актуальная бесконечность (Зенон Элейский и Георг Кантор)“, Academia, 1923.

Математический анализ, на заре своего развития, прошел мимо указанных трудностей. Эта эпоха в истории нашей науки связана с именем Ис. Ньютона, который стоял на точке зрения, диаметрально противоположной критике элеатов. Ньютон вовсе не считался с их аргументами; он просто устранял такие соображения, исходя, повидимому, из постулата возможности знания. Известно, с каким пренебрежением относился великий ученый к созданию гипотез, выходящих за пределы опыта!

Созданный Ньютоном современный анализ оказался могучим средством и для теоретических, и для практических приложений. Между тем аргументы Зенона против основных понятий математики и механики, несмотря на многочисленные попытки их опровергнуть, оставались неопровергнутыми.

Во 2-й половине XIX столетия, вообще подвергшего основы математики тщательному пересмотру, появились работы немецкого ученого Георга Кантора (род. в 1845 г. в С.-Петербурге), несомненно принадлежащие к одному из видных достижений этого плодотворного столетия. Кантор создал математическую науку о бесконечном, ясно разграничив те методы, с которыми можно подходить к этим понятиям, от тех, применение которых приводит к неизбежным противоречиям. Учение Кантора пролило новый свет на апории Зенона и объяснило в них то, что вообще поддается объяснению.

Отмежевываясь от соображений метафизического и теологического характера, которыми Г. Кантор сопровождал подчас свои исследования, надо признать, что его учение об актуальной бесконечности вырвало у зеноновых апорий их жало, направленное против возможности математического естествознания. Но было бы поспешным утверждать, что оно опровергло их до конца; такие ноты уже звучали в предыдущем издании этой книги.

После этого автор многое передумал в связи с давно известными парадоксами в учении о множествах и в связи с новейшей критикой основ математики. Он пришел к выводу, что неопровержимый остаток апорий Зенона не может быть устранен и вовсе не нуждается в опровержении: здесь „родоначальник диалектики“ *) с поразительной силой вскрыл диалектическую природу основных понятий математики, а именно — понятий о бесконечности и о пределе.

Такую точку зрения автор попытается провести и в настоящей книге, использовав материал предыдущего издания и присоединив сюда некоторые выводы из другой своей работы об общих основаниях метода Ньютона **).

С. Богомолов.

6/IX 1933 г.

---

*) Так называет Зенона Гегель (Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie, Bd. I, S. 302).

**) „Общие основания Ньютонова метода первых и последних отношений“ [„Изв. физ.-мат. общ. при Казанском унив.“, 2-я серия, т. XXII, № 2, 1916].

I

Глубокая древность завещала нам несколько знаменитых аргументов или „*апорий*“ *Зенона Элейского*, которые, будучи облечены подчас в чуждую математике форму, обнаруживали с достаточной ясностью серьезные трудности, лежащие в основе чисто математических понятий континуума и бесконечности. Втечение целых столетий ученые скорее отмахивались от этих досадных парадоксов, чем старались их разрешить, и Гегель имел полное основание сказать, что зенонова диалектика материи доныне не опровергнута *). Лишь в новое время учение о совокупностях, разработанное Г. Кантором, выяснило спорные понятия континуума и бесконечности и дало ключ к пониманию названных выше аргументов; вместе с тем оно показало, каким глубоким и проницательным мыслителем был древний философ, которого иные склонны были считать за самого обыкновенного софиста.

Мы начнем с выяснения основного положения Г. Кантора—о законности понятия об актуально-бесконечном.

Понятия „объект“, „совокупность“ или „множество“ (последнее мы считаем равнозначащим с понятием класса), „принадлежность объекта к данной совокупности“ мы примем за основные, оставляя в стороне их логический анализ. Совокупность считается *вполне определенной*, коль

---

*) Hegel, Vorlesungen üb. d. Gesch d. Phil. Bd. I, S. 312. Гамильтон, признавая ложным заключение, к которому приводят аргументы Зенона, тем не менее считал их неопровержимыми (см. St. Mill „La philosophie de Hamilton“, Paris, 1869, p. 520).

скоро относительно любого данного нам объекта мы в состоянии решить, принадлежит ли он этой совокупности или нет.

Надо отметить, что *практически* указанное решение не всегда возможно. Пусть, напр., речь идет о совокупности рациональных чисел, лежащих между 0 и 1; далее, ставится вопрос о принадлежности к этой совокупности некоторого числа, которое по своей величине заключается между указанными границами, но само оно задается таким бесконечным рядом или таким определенным интегралом, которые мы не можем найти в конечном виде. Вопрос сводится к тому, будет ли заданное число рациональным или иррациональным. В некоторых случаях математика разрешает подобные вопросы; напр., нечто подобное сделано для чисел e и π, но может случиться, что в данном вопросе мы окажемся бессильны сделать определенное заключение о природе заданного числа. Основываясь на подобных соображениях, иногда возражают против определения, сделанного в тексте. Так, пишущему эти строки пришлось однажды выслушать такое возражение со стороны одного из наших математиков, известных своим интересом к философским вопросам. Последний привел, между прочим, следующий пример: один из присутствующих в комнате записал в своей записной книжке определенное число и, никому не показывая, спрятал книжку в карман; спрашивается, принадлежит ли это вполне определенное число к совокупности целых чисел, или нет.

Такие исключения основаны на том, что объект и совокупность задаются не одинаковыми способами, и у нас не хватает данных, чтобы сделать их однородными. Недостаточность знаний в некоторых случаях не может служить возражением против приведенного выше определения. Между тем, всякое вещественное число либо соизмеримо, либо нет; всякое число—либо целое, либо—нет.

Как известно, совокупности или классы можно задавать двояко: *по объему* и *по содержанию*. Первый способ состоит в прямом перечислении всех членов класса, второй—в указании общего им признака. Некоторые классы можно задавать любым из этих способов (напр.: совокупность учеников такого-то учебного заведения), другие же—только последним (напр.: совокупность целых чисел или точек данного отрезка). *В различии двух этих способов* *лежит ключ к решению всех вопросов, связанных с понятием бесконечности.*

Две совокупности называются *равномощными,* если между их элементами возможно установить одно-однозначное соотношение, так что каждому элементу одной совокупности отвечает один и только один элемент другой; напр., очевидно, что равномощными будут совокупности четных и нечетных чисел, точек окружности и лучей из ее центра. В самом деле, каждому четному числу можно привести в соответствие то нечетное число, которое меньше его на единицу, а каждому нечетному — то четное, которое больше его на единицу. Точно так же, каждому лучу, исходящему из центра окружности, будет соответствовать на окружности точка пересечения этих линий, а каждой точке окружности—луч, идущий из центра к этой точке. О равномощных классах говорят также, что они имеют одну и ту же *мощность* или одно и то же число членов. В дальнейший анализ понятия числа мы вдаваться не будем, так как это понятие для последующего имеет лишь вспомогательное значение.

Одна совокупность является *частью* другой, если любой элемент первой входит в состав второй, причем эта последняя содержит элементы, не принадлежащие первой; вторая совокупность по отношению к первой называется *целым*; о ней будем говорить также, что она *обширнее* первой (оставляя слово *больше* для чисел).

Таким образом, аксиома: „целое обширнее части" у нас будет суждением несомненно аналитическим.

Мы подошли теперь к основному вопросу учения о трансфинитном: может ли часть оказаться равномощной целому?

Подобное допущение совершенно невозможно для совокупностей, задаваемых по объему. В самом деле, возьмем одну из таких совокупностей α и будем действительно перечислять ее члены, давая им последовательно названия: 1-й, 2-й и т. д.; перебрав все, мы последнему дадим некоторое название „n-й"; тогда n будет числом членов совокупности α, как это устанавливается в основах арифметики. Возьмем теперь какую-нибудь часть β данной совокупности и, проделав для нее то же самое, дойдем до числа n_1; это n_1 непременно меньше n, так как теперь не будет уже нескольких шагов в процессе перечисления элементов; но если бы β оказалась равномощной с α, то n было бы равно n_1, что невозможно. Совокупности, которые не равномощны ни с одной из своих частей, называются *конечными*; мы видим, что все классы, задаваемые по объему, — конечны.

Перед нами теперь естественно возникает вопрос: будет ли непременно конечной всякая вполне определенная совокупность или нет? Другими словами, можно ли говорить о существовании вполне определенной совокупности, которая была бы равномощной со своей частью? Во избежание всяких недоразумений отметим, что равномощность целого и части ни в коем случае не совпадает с их тождественностью, так что о таком грубом противоречии говорить здесь нельзя. Действительно, говоря о равномощности двух совокупностей, мы утверждаем лишь возможность установить между их элементами одно-однозначное соответствие; для тождественности наших совокупностей это будет одним из необходимых условий, но совершенно ясно, что оно далеко не достаточно. Итак, ставится вопрос, совместимы ли в понятии класса признаки: „обширнее данной совокупности" и „равномощный с нею". Ответ будет утвердительным, так как мы в состоянии указать вполне конкретные совокупности, которые обладают обоими признаками одновременно.

Остановимся на некоторых примерах.

1) Совокупность натуральных чисел, конечно, обширнее совокупности только четных чисел; тем не менее между обеими совокупностями можно установить одно-однозначное соответствие: стоит только каждому натуральному числу отнести то четное число, которое вдвое его больше, и каждому четному—то натуральное число, которое равно его половине.

2) Совокупность всех вещественных чисел z, удовлетворяющих условиям: $0 \leqslant z \leqslant 1$, обширнее совокупности вещественных чисел z', определенных неравенствами $0 \leqslant z' \leqslant \frac{1}{2}$, и тем не менее обе совокупности — равномощны. Это становится ясным, если мы условимся считать взаимно соответственными такие два числа z и z' наших совокупностей, между которыми имеет место соотношение:

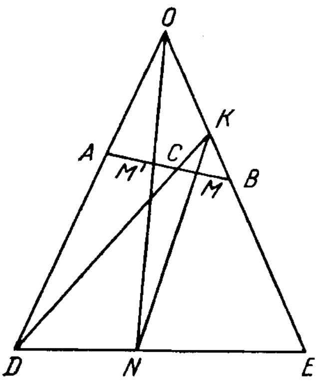
$$zz' + z' - z = 0.$$

Отсюда находим:

$$z' = \frac{z}{1+z} \text{ и } z = \frac{z'}{1-z'},$$

и совершенно очевидно, что каждому значению z соответствует одно и только одно значение z', и наоборот; далее, если z непрерывно возрастает от 0 до 1, то z' тоже непрерывно возрастает, но уже от 0 до $^1/_2$, и обратно.

3) Отрезок BC (черт. 1) есть часть отрезка BA; тем не менее между точками этих отрезков возможно установить одно-однозначное соотношение; достигается это с помощью следующего построения. Возьмем точку O вне отрезка AB и проведем лучи OA и OB; на OA берем точку D так, чтобы прямая DC пересекала отрезок OB, и точку пересечения отметим буквой K; наконец, соединяем D с точкой E, выбранной на продолжении OB. Пусть теперь задана любая точка M отрезка BC; для нахождения соответствующей ей точки отрезка BA, соединяем K и M и продолжаем KM до пересечения с DE в точке N; прямая ON пересечет отрезок BA в одной вполне определенной точке M', которую и будем считать соответственной точке M. Из чертежа совершенно ясно, что подобное же построение соотнесет каждой точке отрезка BA одну и только одну точку BC. Следовательно, отрезки BC и BA, рассматриваемые как совокупности точек—а в геометрии их именно так и определяют,—являются равномощными, хотя первый служит частью второго.



Черт. 1.

4) Рессель (в своих „Principles of Mathematics") приводит еще один интересный пример, который он называет *„парадоксом Тристрама Шэнди"*. Последний решил подробно описать свою жизнь и на описание первых двух дней своего существования потратил два года; после этого он, конечно, отчаялся в своем предприятии. Но допустим, что Тр. Шэнди — бессмертен; спрашивается, опишет ли он всю свою жизнь, работая с прежней скоростью? На этот

вопрос придется ответить утвердительно. В самом деле, какой бы день жизни писателя мы ни выбрали, он будет иметь определенный номер: он будет n-м, считая с первого дня появления его на свет; а потому этот день будет описан втечение n-го года жизни автора. Если же каждый день жизни будет описан, то можно сказать, что вся жизнь будет описана. Правда, описание никогда не закончится; но это вполне естественно в виду бессмертия автора.

„Парадокс Тр. Шэнди“ в фантастической форме делает совершенно верное утверждение, а именно: совокупность дней (в вечности) равномощна с совокупностью годов.

Итак, существуют совокупности, равномощные с одной из своих частей; такие совокупности будем называть *бесконечными*, или лучше — *актуально-бесконечными*, чтобы подчеркнуть одно различие, о котором еще будет речь. Очевидно, что всякая совокупность либо конечна, либо бесконечна, и эти оба случая исключают друг друга.

Легко также убедиться, что актуально-бесконечный класс нельзя задать по объему: если бы оказалось возможным пересчитать его члены, то, как мы видели выше, этот класс был бы конечным.

Следовательно, никакое число натурального ряда не может служить выразителем мощности актуально-бесконечной совокупности; это, однако, не значит, что здесь уже совсем нельзя говорить о числе. Великая заслуга Г. Кантора в том и состоит, что он расширил наше понятие о числе, введя особые трансфинитные числа.

Мы считаем целесообразным войти здесь в некоторые подробности и показать, как арифметика трансфинитных чисел возникает из рассмотрения конкретных множеств, имеющих основное значение для математики (как напр., ряд натуральных чисел).

Эти сведения, интересные сами по себе, покажут более явственно, что об актуально-бесконечных совокупностях возможно доказательное знание.

Мы ограничимся, конечно, самыми элементами; дальнейшие выводы читатель найдет в следующих книгах: „Новые идеи в математике“, сборник № 6: „Учение о множествах Г. Кантора“, СПБ, 1914.

И. Жегалкин „Трансфинитные числа“, Москва, 1907; там же см. указание литературы.

Итак, понятия: „актуально-бесконечная совокупность“,

„равномощные совокупности“, „мощность“, „часть“, „обширнее“ — нам известны. Мощность иначе называется *кардинальным* (количественным) *числом.*

Числа натурального ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n, \ldots$$

каждое в отдельности, дают нам конечные мощности; но еще один средневековый философ сказал об этих числах, что каждое из них в отдельности — конечно, а все вместе — бесконечны. Действительно, выше мы видели, что указанная совокупность натуральных чисел равномощна с совокупностью четных чисел, т. е.—со своею частью, а потому является актуально-бесконечной. Мощность натурального ряда Кантор обозначает еврейской буквой *алеф* с ноликом; для нас будет удобнее называть ее через α_0. Далее, всякое множество, равномощное с рядом натуральных чисел, называется *исчислимым* или *счетным*; установив означенное соответствие его элементов с числами натурального ряда, мы можем расположить их в виде следующего просто бесконечного ряда:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots$$

Из каждого актуально-бесконечного множества можно выделить, в качестве его части, исчислимую совокупность; отсюда нетрудно вывести, что α_0 есть наименьшее из трансфинитных кардинальных чисел.

Вообще мощность совокупности M обозначается Кантором через $\overline{\overline{M}}$, показывая двумя черточками, что здесь мы отвлекаемся и от состава элементов и от их порядка; остается известное количественное свойство, общее всем совокупностям, равномощным с данной.

Основные арифметические действия с конечными числами нам известны; посмотрим, как видоизменяются они, если присоединим сюда новое трансфинитное число α_0.

Если даны две совокупности M и N, то под их суммой $(M+N)$ будем понимать новую совокупность, составленную из элементов обеих данных. Тогда суммой мощностей $\overline{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{N}}$ называется мощность суммы $(M+N)$, так что

$$\overline{\overline{M}}+\overline{\overline{N}}=(\overline{\overline{M+N}}).$$

Таким путем можно, например, доказать равенство:

$$3+5=8.$$

Но сейчас нам интересны те случаи, когда в качестве слагаемых появляются трансфинитные числа. Заметим, что по самому определению суммы, порядок слагаемых не имеет значения; следовательно, это свойство суммы, равно как и сочетательный закон сложения:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

переносится на трансфинитные числа.

С другой стороны, найдем сумму (α_0+k), где k — любое целое положительное число.

Первую мощность α_0 имеет исчислимое множество:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots\ a_n\ \ldots\ldots;$$

а число k будет мощностью такой конечной совокупности:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots\ b_k.$$

Следовательно, сумма (α_0+k) определяется, как мощность множества:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_k,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n\ \ldots \qquad (*)$$

(порядок слагаемых — безразличен).

Нетрудно видеть, что эта последняя совокупность — исчислима.

В самом деле, элементы b можно привести в соответствие с числами:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ k;$$

а элементы a — с числами:

$$k+1,\ k+2,\ k+3,\ \ldots\ldots\ k+n\ \ldots\ldots;$$

так что совокупность (*) окажется в однозначном соответствии с рядом натуральных чисел. Но всякая исчислимая совокупность имеет мощность равную α_0, и мы приходим к неожиданному равенству:

$$\alpha_0+k=k+\alpha_0=\alpha_0. \qquad (1)$$

Здесь, по словам Г. Кантора, лежит „великий камень преткновения“ на пути к учению о бесконечности, который порождал истинный *horror infiniti* (ужас бесконечного). Между тем, ничего нет особенного в том, что действия с новыми трансфинитными числами складываются иначе, чем с издавна известными нам конечными; никого, ведь, не поражает, что теоремы неевклидовой геометрии резко отличаются от теорем евклидовой.

Более того, можно доказать, что:

$$\alpha_0 + \alpha_0 = \alpha_0. \qquad (2)$$

Действительно, совокупности четных и нечетных чисел, как равномощные с совокупностью натуральных чисел, обе — исчислимы, т. е. имеют мощности, равные α_0; поэтому слагаемые в предыдущем равенстве можно рассматривать как мощности таких множеств:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots \ldots 2n, \ldots \ldots$$
$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots \ldots (2n-1), \ldots ;$$

тогда от соединения этих множеств получим ряд натуральных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots (2n-1),\ 2n, \ldots,$$

что и доказывает равенство (2).

Произведение двух мощностей можно определить как сумму равных слагаемых, так что равенство (2) перепишется так:

$$\alpha_0 \cdot 2 = \alpha_0 \ldots \ldots \qquad (2^1)$$

Но можно ввести произведение непосредственно. Пусть множество M состоит из элементов m, а N — из n; составим новое множество $(M \cdot N)$ из всевозможных пар (m, n), образованных с помощью элементов данных множеств. Произведение данных мощностей определяется как мощность новой совокупности:

$$\overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{N}} = (\overline{\overline{M \cdot N}}).$$

Таким путем можно, напр., найти равенство:

$$3 \cdot 5 = 15.$$

Предложим себе вычислить сразу произведение $\alpha_0 \cdot \alpha_0$.

Из равенства (2^1) уже нетрудно вывести, что:

$$\alpha_0 \cdot k = \alpha_0,$$

где k — конечное число. Заметим, что приведенное выше определение произведения не зависит от порядка множителей.

Переходя к определению произведения α_0 на α_0, надо взять два исчислимых множества (напр.: два ряда натуральных чисел) и образовать всевозможные пары, беря 1-й элемент произвольно из 1-го ряда, а 2-й—из 2-го. Совокупность указанных пар можно привести в одно-однозначное соответствие с квадратиками нижеследующей таблицы (читатель благоволит пока не обращать внимания на числа, стоящие внутри квадратиков, кроме верхней строки и левого столбца, которые нужны с самого начала):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67		
2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68			
3	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69				
4	10	14	19	25	32	40	49	59	70					
5	15	20	26	33	41	50	60	71						
6	21	27	34	42	51	61	72							
7	28	35	43	52	62	73								
8	36	44	53	63	74									
9	45	54	64	75										
10	55	65	76											
11	66	77												
12	78													
3														

Действительно, каждый квадратик связан с двумя числами (в верхней строке и в левом столбце), определяющими те полосы, на пересечении которых стоит рассматриваемый квадратик; так, напр., квадратик, внутри которого стоит число 49, связан с парой чисел 7 и 4, квадратик 64 связан с парой 3 и 9, и т. д. Обратно, задание пары чисел вполне определяет соответствующий квадратик; так, напр., паре чисел 4 и 9 соответствует квадратик 75, и т. д. Следовательно, мощность совокупности этих квадратиков и будет мощностью произведения $\alpha_0 \cdot \alpha_0$.

С другой стороны, совокупность квадратиков равномощна с совокупностью натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n, \ldots$$

Для того, чтобы в этом убедиться, перенумеруем квадратики с помощью этих чисел по косым линиям так, как это указано на таблице; тогда каждый квадратик, как бы далеко он ни стоял, получит определенный номер, и обратно: для каждого натурального числа найдется соответствующий квадратик. Выходит, что мощность совокупности квадратиков равна α_0, и читатель волей-неволей должен согласиться с равенством:

$$\alpha_0 \cdot \alpha_0 = \alpha_0. \tag{3}$$

Степень мы определим обычным образом, — как произведение равных сомножителей, так что равенство (3) дает нам тогда:

$$\alpha_0^2 = \alpha_0.$$

Далее имеем:

$$\alpha_0^3 = \alpha_0^2 \cdot \alpha_0 = \alpha_0 \cdot \alpha_0 = \alpha_0$$

и вообще:

$$\alpha_0^k = \alpha_0, \tag{4}$$

где k — любое число натурального ряда.

После всего изложенного читатель, пожалуй, придет к выводу, что действия над α_0 всегда будут приводить к той же самой мощности. Однако, возвышение в степень не оправдает этих ожиданий; сейчас мы докажем, что уже 2^{α_0} будет мощностью, большей α_0. Указанную степень мы будем рассматривать как произведение:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots,$$

где совокупность множителей — исчислима, т. е. — имеет мощность равную α_0.

Для вычисления мощности произведения, сделаем естественное обобщение правила, данного для двух множителей, и составим всевозможные комбинации:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots v_n, \ldots),$$

где v_1 — один из элементов 1-й двойки, v_2 — один из элементов 2-й двойки, и т. д. Пусть число 2 представляет мощность совокупности, состоящей из двух элементов x и y; тогда любое v_n или равно x, или равно y. Следовательно, $2^{\aleph_0}$ будет мощностью множества, составленного из всевозможных совокупностей:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots \ldots v_n, \ldots \ldots),$$

где для каждого v возможны два и только два значения, а именно: x или y.

Попробуем допустить, что это множество — исчислимо, т. е. что его элементы можно расположить в просто бесконечный ряд:

$$V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots \ldots V_n, \ldots \ldots, \qquad (*)$$

и пусть:

$$\begin{aligned} V_1 &= (v_{11}, v_{12}, v_{13}, \ldots \ldots v_{1n}, \ldots \ldots) \\ V_2 &= (v_{21}, v_{22}, v_{23}, \ldots \ldots v_{2n}, \ldots \ldots) \\ V_3 &= (v_{31}, v_{32}, v_{33}, \ldots \ldots v_{3n}, \ldots \ldots) \end{aligned}$$

и т. д.;

причем каждое v_{mn} или равно x, или равно y.

Таким образом, мы допускаем, что ряд (*) вполне исчерпывает элементы рассматриваемого множества; но сейчас мы без труда укажем элемент этого множества, который не заключается в ряду (*).

Таковым будет:

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots \ldots u_n, \ldots \ldots)$$

при условии, что:

$$u_n = x, \text{ если } v_{nn} = y$$

и

$$u_n = y, \text{ если } v_{nn} = x.$$

Так, напр., если

$$v_{11} = x, \text{ то } u_1 = y;$$

если

$$v_{22} = y, \text{ то } u_2 = x;$$

если

$$v_{33} = x, \text{ то } u_3 = y,$$

а если

$$v_{33} = y, \text{ то } u_3 = x, \text{ и т. д.}$$

Следовательно, совокупность U отличается от каждой из совокупностей (*) по крайней мере одним элементом; а потому U не находится в ряду (*). Таких совокупностей U можно построить сколько угодно (на основании подобных же правил); но уже сказанного достаточно, чтобы установить, что 2^{α_0} и α_0 — не равномощны.

Выше мы видели, что α_0 — наименьшая из трансфинитных мощностей.

Следовательно, мы должны признать, что

$$2^{\alpha_0} > \alpha_0,$$

и мы пришли к мощности, большей первого альфа.

О других трансфинитных мощностях мы скажем ниже; а сейчас применим полученные результаты к определению мощностей некоторых множеств.

Какова мощность совокупности всех положительных рациональных чисел? Что эта совокупность — трансфинитна, в достаточной мере ясно: уже в промежутке между двумя любыми целыми числами лежит бесконечное множество дробей. Каждое рациональное число есть выражение вида:

$$\frac{p}{q},$$

где p и q — любые числа натурального ряда. Следовательно, рассматриваемое множество равномощно с совокупностью всевозможных пар:

$$(p, q);$$

мощность же последней совокупности равна α_0, как было доказано выше.

Итак, множество всех положительных дробей — исчислимо. Надо добавить, что для расположения их в просто бесконечный ряд:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$$

надо вывести их из обычного расположения в порядке возрастающей величины; в этом порядке они не могут быть соотнесены с натуральным рядом, ибо для данной дроби нет дроби, непосредственно за ней следующей: какую бы близкую к ней дробь вы ни взяли, всегда найдется другая дробь, лежащая между двумя данными (напр.: их арифметическое среднее), тогда как для каждого целого числа имеется число, непосредственно за ним следующее. Для того, чтобы обнаружить исчислимость множества рациональных чисел, надо выписать их в том самом порядке, в котором выше были перенумерованы пары чисел (см. таблицу на стр. 16); тогда получим следующий ряд:

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3};\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4};\ \frac{5}{1},\ldots$$

(верхняя строка дает числителя, левый столбец — знаменателя).

Г. Кантор доказал даже, что совокупность всех вещественных алгебраических чисел (т. е. чисел, служащих корнями алгебраических уравнений) тоже имеет мощность равную α_0.

Займемся мощностью континуума, о котором придется еще говорить по поводу одной из апорий Зенона.

Посредством подстановки:

$$z' = \frac{1}{1+z} \text{ и } z = \frac{1}{z'} - 1$$

совокупность всех положительных вещественных чисел оказывается равномощной с совокупностью вещественных чисел, лежащих в промежутке между 0 и 1.

Действительно, когда z пробегает все значения от 0 до ∞, число z' изменяется в промежутке от 1 до 0 и обратно, причем указанное соотношение, очевидно, обладает свойством одно-однозначности. Поэтому, говоря о мощности континуума, можно ограничиться промежутком от 0 до 1 (для отрицательных чисел можно сделать подобные же заключения). Все числа этого промежутка (как рациональные, так и иррациональные) можно задать по двоичной системе счисления, т. е. — приняв за основание счисления число 2 вместо обычного 10; именно, эти числа будут заданы бесконечными сходящимися рядами вида:

$$\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \frac{\varepsilon_3}{2^3} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \ldots,$$

где каждое ε может равняться 1 или 0.

Тогда в двоичной системе такое число x можно записать так:

$$x = 0,\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \ldots\ldots\ \varepsilon_n\ \ldots\ldots$$

(подобно тому, как мы пишем десятичные дроби в обычной системе счисления).

Так, например:

$$\frac{15}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4},$$

или:

$$\frac{15}{16}=0{,}1111;$$

здесь получается конечный ряд, так что все ε, начиная с 5-го места, равны нулю. Далее:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\ldots,$$

как это легко проверить по формуле для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, или:

$$\frac{2}{3}=0{,}10101010\ldots.$$

После этого континуум оказывается равномощным с совокупностью всевозможных комбинаций:

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\ldots\varepsilon_n,\ldots),$$

где каждое ε может иметь одно из двух раз навсегда заданных значений. Мы видели выше, что мощность такой совокупности равна 2^{α_0}, и, следовательно, такова будет и мощность континуума *). Мы убеждаемся, что мощность континуума превосходит мощность целых, рациональных и алгебраических чисел.

Кантор доказал, далее, что мощность континуума k измерений одинакова с мощностью линейного континуума; после всего изложенного читателю нетрудно будет согласиться с этим (вспомним, напр., что ${\alpha_0}^k=\alpha_0$), а нам пора кончать заметку о мощностях. Добавим только, что Пеано иллюстрировал это предложение, построив кривую, заполняющую площадь квадрата; координаты (x, y) переменной точки суть функции переменной независимой t, и когда последняя пробегает промежуток от 0 до 1, указанная точка при-

*) Ради экономии места мы не останавливаемся на одном затруднении, связанном с тем, что при нашем обозначении некоторые числа повторятся дважды; это не повлияет на мощность рассматриваемой совокупности.

нимает всевозможные положения внутри квадрата со стороной равной 1.

Изученные нами мощности или кардинальные числа, отвлекаясь от состава элементов данного множества и от их порядка, выражают его количественное свойство; теперь нам предстоит познакомиться с другими трансфинитными числами, связанными с идеей порядка или расположения элементов. Начать придется с некоторых определений.

Пусть дано множество M с элементами $a, b, c, \ldots$; положим, что между этими элементами каким-нибудь способом устанавливаются известные соотношения, которые выражаем словами: „один элемент *предшествует* другому" (а этот последний *следует* за первым); в интересах сокращения письма, условимся эти отношения обозначать символами: „прш" и „сл".

Множество называется *упорядоченным*, если о всякой паре его элементов a и b мы можем утверждать, что:

$$\text{или } a \text{ прш } b, \text{ или } b \text{ прш } a,$$

причем, если имеем:

$$a \text{ прш } b \text{ и } b \text{ прш } c,$$

то необходимо должно быть:

$$a \text{ прш } c.$$

Так, напр., если возьмем совокупность всех рациональных чисел и условимся говорить, что „a прш b", если $a < b$, то, как легко убедиться, получим упорядоченное множество.

Два упорядоченных множества называются *подобными*, если между их элементами можно установить такое одно-однозначное соответствие, при котором относительный порядок элементов остается неизменным. Последнее утверждение надо понимать так: если a и a', b и b' суть две пары соответственных элементов в совокупностях M и M', и если a прш b, то должно быть a' прш b'. Легко видеть, что подобные множества — равномощны, но обратного утверждать нельзя: совокупность рациональных чисел имеет мощность равную α_0, но в описанном выше расположении она не подобна натуральному ряду чисел, ибо в последнем для каждого члена есть *непосредственно* за ним следующий, тогда как для рациональных чисел этого нет.

Подобно тому, как мощность была определена в качестве свойства, общего всем равномощным друг с другом множествам, так и теперь мы определим *тип расположения*, как то общее, что присуще всем подобным между собою множествам.

Тип множества M Кантор обозначает через $\overline{M}$, указывая одной черточкой на то, что здесь мы отвлекаемся лишь от состава элементов, принимая во внимание их порядок. В частности, тип натурального ряда:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots .\, n, \ldots .$$

Кантор обозначает греческой буквой ω (это множество становится упорядоченным, если под отношением „прш" понимать отношение „меньше"). Далее, тип упорядоченного выше множества рациональных чисел обозначается греческой же буквой η.

Наконец, упорядоченное множество M называется *вполне упорядоченным* при соблюдении следующих условий:

1) M имеет первый элемент;

2) если в M вообще имеются элементы, следующие за всеми элементами какой-либо части его M', то среди них имеется первый элемент.

Применяя последнее условие к части, состоящей из одного элемента, получаем характерное свойство вполне упорядоченного множества: всякий элемент имеет первый, непосредственно за ним следующий; исключением может явиться лишь последний элемент, если таковой существует.

Так, напр., ряды:

$$b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots .\, b_{k-1},\ b_k;$$

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots .\, a_n, \ldots .$$

очевидно будут вполне упорядоченными; только первый — конечен, а второй — бесконечен.

Тип всякого вполне упорядоченного множества и называется *ординальным* (порядковым) *числом*. Так, напр., введенное выше ω будет числом, а η не будет таковым, хотя оно является одним из типов расположения.

Ординальное число не надо смешивать с порядковыми числительными: 1-й, 2-й, и т. д.; из предыдущих определений ясно, что это — нечто совершенно иное.

Различие между кардинальными и ординальными числами проявляется в полной мере лишь для актуально-бесконечных совокупностей; для конечных же эти два понятия почти сливаются. Так, число 5, помимо известной мощности, является также типом следующей конечной вполне расположенной совокупности, имеющей указанную мощность:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5.$$

Пересчитывая элементы любой пятерки, мы располагаем их именно в такой ряд, и никакой другой вполне упорядоченной совокупности из 5 членов построить нельзя; так что обе точки зрения здесь тесно связаны друг с другом. Между тем, мы сейчас познакомимся с бесчисленным множеством различных вполне упорядоченных множеств, имеющих одну и ту же трансфинитную мощность α_0.

Первое трансфинитное ординальное число есть ω, которое служит типом расположения натурального ряда:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots \ldots n, \ldots \ldots$$

Сложение, умножение и возвышение в степень дадут нам сейчас другие трансфинитные числа.

Пусть $\overline{M}$ и $\overline{N}$ суть типы двух вполне упорядоченных множеств M и N. Образуем новое вполне упорядоченное множество следующим образом: выпишем все элементы множества M, сохраняя их порядок, а за всеми ими заставим следовать элементы множества N, — тоже не нарушая их первоначального расположения. Тогда тип нового множества будет суммой $\overline{M}+\overline{N}$.

Исходя из этого определения суммы, найдем числа $(1+\omega)$ и $(\omega+1)$.

Первое будет типом множества:

$$b_1;\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots \ldots, a_n, \ldots \ldots,$$

т. е., оно — тождественно с ω; а 2-е связано с вполне упорядоченной совокупностью:

$$a_1,\ a_2,\ a_3. \ldots \ldots, a_n, \ldots \ldots;\ b_1,$$

и оно отлично от ω, ибо новый ряд имеет последний член, чего нет в типе ω.

Итак:

$$1+\omega=\omega \quad \text{и} \quad \omega+1 \neq \omega.$$

Точно так же докажем вообще:

$$k+\omega=\omega \text{ и } \omega+k\neq\omega, \tag{5}$$

где k — любое конечное ординальное число.

Мы убеждаемся, что переместительный закон сложения не имеет места для трансфинитных ординальных чисел; но сочетательный закон остается в силе, как это нетрудно доказать.

Читатель согласится без труда, что мощность типа $(\omega+k)$ будет тем же α_0, ибо:

$$\alpha_0+k=\alpha_0.$$

Произведение типов $\overline{M}$ и $\overline{N}$, где $\overline{M}$—множимое, а $\overline{N}$—множитель (это здесь необходимо тщательно различать) определяется следующим образом. Возьмем множество N и каждый элемент его заменим множеством типа $\overline{M}$; таким образом, в каждом из таких множеств элементы следуют друг за другом в том же порядке, что и в M; а сами отдельные множества типа $\overline{M}$ расположены друг по отношению к другу совершенно так же, как элементы в совокупности типа $\overline{N}$. Произведение $\overline{M}\cdot\overline{N}$ и определяется, как тип нового вполне упорядоченного множества.

Найдем, для примера, произведения:

$$2\cdot\omega \text{ и } \omega\cdot 2.$$

Первое будет типом ряда:

$$a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ a_3,\ b_3;\ \ldots\ldots\ a_n,\ b_n;\ \ldots\ldots$$

Нетрудно видеть, что мы снова получаем число ω. Что касается второго произведения, то для него надо составить ряд:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_n, \ldots\ldots,$$

и это будет новый тип, отличный от ω (элемент b_1 не имеет непосредственно предшествующего ему, имея вообще предыдущие элементы, чего нет в типе ω).

Итак:

$$2\cdot\omega=\omega \text{ и } \omega\cdot 2\neq\omega;$$

Точно так же получим вообще:

$$k\cdot\omega=\omega \text{ и } \omega\cdot k\neq\omega. \tag{6}$$

Переместительный закон и здесь не выполняется (а сочетательный остается в силе).

От умножения нетрудно перейти к степени; напр., ω^2 определится как произведение $\omega \cdot \omega$; здесь мы, очевидно, придем к новому типу, но все той же мощности α_0.

Г. Кантор дает правила для построения ординальных чисел, определяемых символами:

$$\omega \cdot k + m, \ldots \quad \omega^2, \ldots \quad \omega^2 + k, \ldots \quad \omega^2 + \omega + 1, \ldots \omega^2 + \omega \cdot 2, \ldots \quad \omega^2 + \omega \cdot k + m, \ldots \quad \omega^2 \cdot 2, \ldots \omega^2 \cdot k, \ldots \ldots \omega^3, \ldots \omega^k, \ldots \quad \omega^{\omega} \ldots \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots ;$$

все они суть типы вполне расположенных исчислимых множеств.

Последнее замечание служит основанием для деления чисел на классы. Конечные ординальные числа образуют I класс; II же класс составляют всевозможные типы вполне упорядоченных множеств, имеющих мощность равную α_0; сюда относятся те трансфинитные числа, о которых только что шла речь.

Но если мы рассмотрим множество, составленное из всех чисел II класса, то мощность его уже не будет равна α_0; Кантор обозначает ее через α_1; это — 2-я трансфинитная мощность, по величине непосредственно следующая за α_0.

Затем Кантор рассматривает всевозможные типы вполне упорядоченных множеств мощности α_1 и называет их числами III класса. Оказывается, что совокупность всех чисел III класса имеет мощность, следующую по величине за α_1; эта мощность обозначается через α_2, и т. д.

Таким образом, получается бесконечный ряд возрастающих трансфинитных мощностей:

$$\alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots$$

Находится ли в этом ряду и мощность континуума, равная 2^{α_0}? Для ответа на этот вопрос нужна теорема Цермело: *„всякое множество можно мыслить вполне упорядоченным“*. В виду тонкости доказательства, оно подверглось оживленной критике. Если принять теорему Цермело, то мощность континуума будет равна одному из алефов.

В предыдущем мы изложили некоторые черты из теории трансфинитных чисел, соответствующих конкретным множествам, играющим важную роль в нашей науке. Но нам нет надобности вдаваться в общую теорию Кантора о множествах, которая представляет более спорную область. Эта общая теория уже давно привела к одному известному противоречию.

Противоречие, относящееся к учению об ординальных трансфинитных числах, было впервые указано итальянским ученым Бурали-Форти. Суть его заключается в следующем.

Выше мы познакомились с бесконечным (неисчислимым) рядом трансфинитных ординальных чисел:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n, \ldots \omega,\ \omega+1, \ldots \omega \,.\, 2 \ldots \omega^2, \ldots \omega^\omega \qquad (*)$$

Нетрудно видеть, что здесь мы имеем дело с некоторым вполне упорядоченным множеством, тип которого обозначим через Ω. Это Ω будет новым ординальным числом, которое есть не что иное, как тип расположения *всех* ординальных чисел в порядке возрастающей величины; само Ω будет больше всякого числа из ряда (*), ибо в противном случае оно соответствовало бы только части этого ряда. Но для всякого ординального числа, в том числе и для Ω, можно путем прибавления единицы получить число, непосредственно за ним следующее.

Таким образом получаем число:

$$\Omega+1>\Omega.$$

Однако ряд (*) содержит *все* ординальные числа, а, следовательно, и новое число $\Omega+1$.

Но тогда будет:

$$\Omega+1<\Omega,$$

и мы приходим к противоречию.

В изложенном рассуждении жало противоречия направлено против учения о трансфинитных числах, чем и воспользовались противники этого учения (сюда относятся и некоторые выпады Пуанкарэ против „канторизма“). Но очень скоро были найдены такие же противоречия характера общелогического.

Вопросом об этих противоречиях много занимался Рессель; для их преодоления он создал особую *„теорию типов“*, которая сильно усложнила дальнейшие построения. В применении к противоречию Бурали-Форти эта теория гласит, примерно, так: ординальное число ряда всех ординальных чисел будет высшего типа, чем эти числа, а потому его нельзя ставить на одну доску с'ними; следовательно, ни Ω, ни $\Omega+1$ не являются членами данного ряда, и противоречие исчезает.

В новейшее время основы математики подверглись известной критике со стороны Вейля и Броуэра; основным положением их является утверждение, что закон исключенного третьего не применим ни к какому бесконечному множеству, а с этим связано отрицание того, что континуум является совокупностью точек. В недавно вышедшей книге акад. Лузина *) приводится совершенно правильное и тонкое замечание Адамара, который сомневается, чтобы на самом деле можно было в каком-либо случае отрешиться от закона исключенного третьего. Сам автор, не сочувствуя точке зрения интуиционизма и допуская применение спорного принципа, присоединяется к приглашению Адамара прекратить бесполезные споры и подождать новых данных, способных осветить этот трудный вопрос **).

Входить в разбор всех этих тонких вопросов мы здесь не можем, да это и не нужно для целей настоящей книги. Нам важно основное понятие об актуальной бесконечности, которое имеет твердую опору в таком коренном математическом объекте, как ряд натуральных чисел.

В понятии актуально-бесконечной совокупности важно выдвинуть две стороны: во-первых, полную определенность и законченность этой совокупности и, во-вторых, ее неисчерпаемость конечными средствами: мы не можем последовательно пересчитать всех ее элементов. Вот это-то понятие об актуальной бесконечности и вызывало всегда нападки. В далекую древность уходит известное положение: „*infinitum actu non datur*“ [не существует действительной (актуальной) бесконечности]. Мы ограничимся рассмотрением двух наиболее серьезных возражений против указанного понятия.

Известно, что из отрицания завершенной бесконечности Кант сделал решающее употребление при доказательстве

*) Лузин „Современное состояние теории функций действительного переменного“, стр. 27—28, ГТТИ, 1933.

**) Ib, стр. 31, 32, 46, 51.

тезиса 1-й математической антиномии, именно — антиномии величины мира. Этот тезис гласит: „мир имеет начало во времени и ограничен также в пространстве“; тогда как антитезис утверждает, что мир — бесконечен как во времени, так и в пространстве. Замечательно, что в примечании к тезису *) находим одно из возможных определений бесконечности: „истинное... понятие бесконечности состоит в том, что последовательный синтез единицы при измерении количества никогда не может быть закончен“. Отсюда Кант заключает, что „бесконечный аггрегат действительных вещей не может быть рассматриваем, как данное целое“ **). Выше на примерах из области математики мы видели, что это не так; и суть дела в том, что, помимо „последовательного синтеза единицы“, т. е. счета, существует другой способ задания бесконечных совокупностей. Позиция Канта становится сильнее, когда он рассматривает специально временной ряд и настаивает на невозможности законченной бесконечности в этом случае. Доказательство указанной части тезиса построено следующим образом ***).

„В самом деле, если мы допустим, что мир не имеет начала во времени, то до всякого данного момента времени протекла вечность и, следовательно, протек бесконечный ряд следующих друг за другом состояний вещей в мире. Но бесконечность ряда именно в том и состоит, что он никогда не может быть закончен путем последовательного синтеза. Следовательно, бесконечный протекший ряд в мире невозможен; значит, начало мира есть необходимое условие его существования, что и требовалось доказать“. Здесь Кант касается действительной трудности, связанной с представлением истекшего бесконечного временного ряда. По существу это — та же самая трудность, которая лежит в основе знаменитой апории Зенона. Ахилл потому и не догонит черепахи, что для этого потребуется завершение некоторого бесконечного ряда.

Этой специальной трудности, относящейся к течению времени и движению, мы коснемся в своем месте, а пока

*) „Критика чистого разума“, пер. Н. О. Лосского, стр. 268.

**) Ib., стр. 266. Этим словам как будто бы противоречит другое место „Критики“ (стр. 44), где говорится о пространстве, как о бесконечной данной величине. Во всяком случае, приходится отметить у Канта некоторое колебание мысли по указанному вопросу.

***) Ib., стр. 266.

отметим, что у Канта мы не нашли уничтожающих возражений против идеи актуальной бесконечности вообще. Вместе с этим падает доказательство его тезиса, и понятие об актуальной бесконечности делает для нас законным положение о том, что мир бесконечен и во времени и в пространстве.

Хотя доказательства в пользу существования актуально-бесконечных совокупностей мы нашли в области математики, однако, нет недостатка в возражениях против законности указанного понятия именно со стороны математиков. С открытием дифференциального и интегрального исчислений понятие бесконечности, казалось, завоевало себе прочную позицию в математике; и действительно, некоторые ученые того времени склонялись к пониманию бесконечно-большого и бесконечно-малого в смысле актуальной бесконечности. Но именно такое понимание заставляло другую часть математиков относиться недоверчиво к новым методам, а его сторонников подчас приводило к не совсем правильным результатам. По мере того как выяснялись основы анализа бесконечно-малых, оттуда изгонялась актуальная бесконечность. Решительный голос в пользу этого изгнания был подан Гауссом, и критические работы второй половины XIX века обосновали дифференциальное и интегральное исчисления на понятии предела, так что, повидимому, из анализа исчез всякий намек на актуальную бесконечность; термины „бесконечно-большое“ и „бесконечно-малое“ остались в качестве традиционных и удобных сокращений, но понятия эти получили определенный смысл и перестали заключать в себе что-то мистическое. Слова Гаусса можно считать как бы программой этой реформы; но в них утверждается и нечто большее. В известном письме к Шумахеру *), по поводу одного предложенного последним доказательства для аксиомы параллелей, Гаусс пишет: „... прежде всего я протестую против пользования бесконечной величиной в качестве законченной, каковое пользование в математике никогда не дозволяется. Бесконечное является лишь *façon de parler* (способ выражения), между тем как речь идет собственно о пределах, к которым известные отношения приближаются произвольно близко, тогда как другим предоставляется

*) Gauss „Werke“, Bd. VIII, S. 215—218; интересующее нас письмо помечено 12-м июля 1831 года.

возрастать без ограничения". Далее Гаусс считает вполне естественным, что „конечный человек не отваживается рассматривать бесконечное, как нечто данное и доступное его привычной интуиции"; здесь этот вопрос, по его мнению, уже непосредственно касается области метафизики. Нельзя игнорировать слова знаменитого ученого, а в этих словах как будто заключается полное изгнание актуальной бесконечности из математики. Против такого понимания цитаты из Гаусса не только нужно указать, что в новейшее время появилась арифметика трансфинитных чисел, но следует сослаться и на то, что понятие об актуальной бесконечности нельзя совершенно удалить даже из области обычной математики. Выше уже было кое-что указано в этом направлении; в виду важности вопроса, считаем нужным войти здесь снова в некоторые подробности.

Начнем с понятия о бесконечно-большом в том его значении, которое единственно допускается в современном анализе. Всякое руководство, всякий профессор математики неизменно подчеркивают своим ученикам, что здесь прежде всего идет речь о величине переменной. Пусть x есть переменная, и между ее значениями каким-либо способом установлена последовательность, так что можно говорить о значениях, следующих за данным; тогда полное определение интересующего нас термина будет таково. Переменная x называется бесконечно-большой, если, каково бы ни было данное положительное число N, среди значений x всегда найдется такое x', что $| x' | > N$, и это неравенство остается в силе для дальнейших значений x *). Такая бесконечность, которая резко отличается от рассмотренной выше тем, что здесь речь идет не о вполне определенном множестве, а о неограниченно возрастающей величине, — называется *потенциальной*. Некоторые математики склонны утверждать, что это — единственная бесконечность, допустимая в их науке; но, как остроумно заметил Г. Кантор, потенциальная бесконечность необходимо предполагает актуальную.

Вопрос о сущности понятия переменной тесно связан с вопросом о движении, как о первообразе всякого изменения (см. ниже). Здесь же отметим, что когда в математике говорят о переменной, то всегда задают область ее изменения, т. е. — совокупность возможных для нее значений.

---

*) Символом $| x' |$ обозначается абсолютное значение x'.

Так, напр., если говорят, что x есть непрерывная вещественная переменная, то вместе с этим необходимо задается совокупность всех вещественных чисел. Для нас важно подчеркнуть, что в подавляющем большинстве случаев областью изменения переменной служит актуально-бесконечная совокупность.

Обратимся снова к бесконечно-большой величине, о которой говорилось выше. Совокупность значений x должна быть вполне определенной, так как характер его изменения нам задан, и в то же самое время она не может быть конечной. Действительно, если она конечна, то, сравнивая попарно различные x, мы найдем среди них наибольшее по абсолютному значению, и пусть это будет x''; если теперь взять положительное число $N > |x''|$, то уже окажется невозможным найти такое x, чтобы имело место неравенство $|x| > N$, что противоречит определению. Из сказанного вытекает, что совокупность значений x — актуально-бесконечна; таковой же будет и совокупность значений переменной z, если последняя стремится к определенному пределу a, ибо абсолютную величину разности $(a-z)$ можно тогда сделать менее всякого наперед заданного положительного числа. Если принять во внимание, что в различных отделах математики постоянно говорится о совокупностях всех целых, всех рациональных или вещественных чисел, о совокупностях точек отрезка, лучей пучка и т. д. и если вспомнить, что все эти совокупности — актуально-бесконечны, то необходимо притти к следующему заключению: хотя из некоторых отраслей математики — во многих случаях совершенно законно и с прекрасными результатами — стараются изгнать актуальную бесконечность, эта последняя тем не менее лежит в основе важнейших понятий нашей науки; и *признать незаконным стремление к достоверному знанию об актуально-бесконечных совокупностях — значит подорвать основы всей математики* *).

*) Мы изложили основы учения об актуально-бесконечных совокупностях и числах, причем здесь имелось в виду *бесконечно-большое*; можно ли развить подобно этому учение об актуально-*бесконечно-малых* величинах? В прежнее время были попытки смотреть на дифференциалы как на величины такого рода [напр., — Пуассон]; но метод пределов раз навсегда устранил это заблуждение. Сам Кантор, творец трансфинитного, является ярым противником актуально-бесконечно-малых; он доказывает, что они несовместимы с понятием линейной числовой вели-

Итак, заканчивая I главу настоящей книги, мы должны решительно отвергнуть утверждение финитистов, что вполне определенная совокупность может содержать лишь конечное число членов, и признать полную законность понятия об актуальной бесконечности.

Но нельзя отрицать, что актуальная бесконечность неустранимо имеет для нас противоречивые черты; так, напр., всех натуральных чисел оказывается столько же, сколько имеется четных чисел, хотя с другой стороны множество последних составляет лишь половину множества первых. Однако эти парадоксы вовсе не свидетельствуют об уничтожающем формально-логическом противоречии: признаваемая всеми математиками закономерность и необходимость понятия о натуральном ряде говорит против этого. Следовательно, эти противоречия коренятся в самой сущности предмета (равномощность целого и части), это — противоречия диалектические. Здесь мы уже видим диалектическую природу понятия о бесконечности, которая обусловливает его своеобразие и даже самую применимость *). Ниже мы еще не раз столкнемся с этой стороной дела.

чины. Если под этим термином понимать понятие о континууме, как оно сложилось в новейшее время, главным образом благодаря работам Дедекинда, то нетрудно убедиться в справедливости утверждения Кантора. Действительно, если a есть конечное число, а ε — актуально бесконечно-малое, то должно быть:

$$n \cdot \varepsilon < a$$

при всяком целом положительном n; в этом заключается сущность рассматриваемого понятия. Между тем, из аксиомы непрерывности [носящей также имя Дедекинда] вытекает так называемое *„начало Архимеда"*, которое гласит, что для любой пары чисел a и ε найдется такое натуральное число n, что

$$n \cdot \varepsilon > a.$$

Следовательно, актуально-бесконечно-малым не место в числовом континууме, с которым мы имеем дело в анализе.

*) По вопросу о приложениях можно сослаться на недавно вышедшие книги: Бэр „Теория разрывных функций", ГТТИ, 1932; Александров и Колмогоров „Введение в теорию функций действительного переменного", ГТТИ, 1933.

В этих книгах встречаемся с приложением учения о трансфинитных числах к различного рода вопросам, затрагиваемым авторами.

II

Понятие бесконечности уже с давних времен представляло различные трудности для человеческого ума; с ним связаны некоторые парадоксы, завещанные нам древностью. Действительно, достаточно лишь бегло ознакомиться с апориями Зенона Элейского, чтобы подметить, какую существенную роль в них играют свойства бесконечной делимости, разложение на бесконечное число частей и т. п. Поэтому интересно будет поставить вопрос, не внесло ли новейшее учение о трансфинитном чего-либо нового в разрешение названных парадоксов. Посвященная аргументам Зенона литература довольно значительна *); но, насколько нам известно, только у Ресселя в его „Principles of Mathematics" можно найти несколько страниц, где эти аргументы разби-

*) Авторы многих статей, посвященных критике аргументов Зенона, исходят из предпосылок, резко отличающихся от наших. Так, в 1-м томе журнала „Revue de Métaphysique et de Morale", 1893, находим ряд таких мемуаров. Noël в статье „Le mouvement et les arguments de Zénon d'Élée" отвергает у понятия континуума всякую идею о составе из отдельных частей, движение для него есть становление пространственных и временных величин. Evellin „Le mouvement et les partisans des indivisibles" допускает существование простейших элементов той же природы, что и целое, но дальше уже неделимых; в своей книге „Infini et Quantité" он является противником актуальной бесконечности. Lechalas („Note sur les arguments de Zénon d'Elée") отрицает непрерывность движения и понятие о бесконечном числе. В последнем с ним согласен Milhaud („Le concept du nombre chez les pythagoriciens et les éléates"); он отрицает также у континуума возможность актуальной разделенности на части (о континууме см. ниже). Сюда надо отнести еще статью Petronievics'a „Zenos Beweise gegen die Bewegung" (Archiv für Geschichte der Philosophie, Bd. 20), в которой автор является убежденным финитистом.

раются при помощи учения Г. Кантора о бесконечном и непрерывном; однако и эту работу нельзя считать исчерпавшей до конца всю глубину вопроса. Во-первых, Рессель рассматривает лишь четыре аргумента против движения, оставляя в стороне аргументы против множественности; между тем, здесь формулировано наиболее древнее и немаловажное возражение против современных воззрений на континуум. Это тем более странно, что названный автор весьма занят философией континуума. Во-вторых, что касается аргументов против движения, то здесь Рессель ограничивается чисто арифметической стороной их, совершенно отвлекаясь от специальных трудностей движения, хотя в его же книге мы находим (в дальнейших главах) и философское исследование принципов механики. Наконец, в том, что дано им, чувствуется некоторая недоговоренность, мешающая оценить по достоинству все те связанные с понятиями бесконечности и непрерывности трудности, которые были вскрыты глубоким умом одного из первых диалектиков древности.

Поскольку дело идет о возможно точной формулировке аргументов Зенона, мы руководились, главным образом, изложением Целлера *); подлинные греческие тексты можно найти в известной книге Дильса **).

Как известно, аргументов против множественности существующего имеется несколько; не все они для нас одинаково интересны, и не все они одинаково сильны. Иногда мы встретимся здесь и с явно неверными утверждениями, напр.: вполне определенная совокупность должна быть конечной. Но если мы обратимся к первому аргументу, касающемуся величины существующего, то увидим, что на его первой половине стоит остановиться подробнее. „Если бы существующее было многим, — так излагает Целлер ход мыслей Зенона ***), — то оно должно было бы быть одновременно и бесконечно-малым и бесконечно-большим. Оно было бы бесконечно-малым, так как каждая из многих частей должна или сама быть неделимой единицей, или состоять из таковых единиц вследствие того, что каждое

*) Zeller „Die Philosophie der Griechen“ (5-te Auflage), erster Theil, S. 584 — 606.

**) Diels „Die Fragmente der Vorsokratiker“, S. 130 — 135.

***) Zeller, l. c., S. 591.

множество есть собрание единиц, а настоящая единица есть только неделимое; а то, что неделимо, не может иметь никакой величины: ведь все, что имеет величину, делимо до бесконечности. Поэтому отдельные части, из которых состоит многое, не имеют никакой величины... Следовательно, многое — бесконечно мало, ибо каждая составная часть его настолько мала, что она есть ничто". В этой цитате нужно прежде всего исправить одну неловкость: термин „бесконечно-малое" употреблен здесь неправильно; но сам Зенон в этом неповинен: из греческого текста явствует, что дело идет об абсолютном нуле, а не о бесконечно-малом *).

Виндельбанд в своей „Истории древней философии" подобным же образом излагает сущность рассматриваемого аргумента **): „...совокупность какого угодно множества частей, из которых каждая сама, как неделимая, не имеет никакой величины, в свою очередь не может составить никакой величины".

Для нас в изложенном аргументе Зенона важно то, что здесь впервые было формулировано возражение против одного из основных понятий современной математики; мы имеем в виду понятие континуума. Из рассуждений Зенона выходит, что *нечто, имеющее величину, нельзя мыслить множественным, так как тогда необходимо придется мыслить его состоящим из неделимых частей; а последние, не имея совсем величины, ни в каком количестве не могут дать целого, имеющего величину.* Прежде всего нетрудно вскрыть здесь связь с идеей актуальной бесконечности; в самом деле, все, что имеет величину, делимо до бесконечности; отсюда следует, что если подобный объект и можно мыслить состоящим из *неделимых* частей, то число последних уже не может быть конечным, так как тогда не имела бы места бесконечная делимость. Так, по всей вероятности, рисуется дело и Целлеру, потому что он пытается опровергнуть рассуждения Зенона именно на почве отрицания актуальной бесконечности: „действительно выполненное бесконечное деление есть *contradictio in adjecto*: число частей всегда ограничено..." ***).

---

*) Μικρὰ δὲ οὕτως ὥστε μηδὲν ἔχειν μέγεθος.

**) Стр. 58.

***) Ib. p. 604.

Мы не согласимся с Целлером, как это следует из рассуждений I главы, а потому и не можем воспользоваться таким простым средством для полемики с греческим философом. Между тем, рассматриваемый вопрос для нас далеко не безразличен.

Возьмем какой-нибудь определенный математический континуум; напр.: совокупность вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$, или конечный отрезок, рассматривая его как совокупность точек. Здесь мы, несомненно, имеем нечто, обладающее величиной и беспредельной делимостью; но математик строит указанные объекты, исходя из простых неделимых элементов: отдельных чисел и геометрических точек. С помощью совокупностей таких простейших элементов — и притом актуально-бесконечных совокупностей, — охарактеризованных известным образом, мы и подходим к понятию о математическом континууме. Но такое его построение как раз является невозможным с точки зрения Зенона: неделимые ни в каком числе не дадут величины, обладающей беспредельной делимостью. Здесь, таким образом, возражение исходит из способа построения континуума; другой не менее знаменитый аргумент берет уже готовое представление и, при всем отличии идей его автора от элейской философии, оперирует с теми же понятиями беспредельной делимости и неделимой части; мы имеем в виду 2-ю математическую антиномию Канта — *антиномию содержания мира* *). Здесь разбирается вопрос о составе сложных субстанций, причем из рассуждения особым образом выделяются пространство и время. Что сказано о них, относится к понятию континуума вообще, так как источником математических знаний у Канта являются именно эти чистые интуиции. Тезис утверждает, что сложные субстанции состоят из простых частей; но оказывается, что это неприложимо к пространству и времени, и, напр., „точка возможна только как гра-

---

*) У нас будет еще случай убедиться в связи математических антиномий Канта с апориями Зенона; здесь уместно будет вспомнить слова Гегеля: „антиномии Канта не идут дальше того, что в этой области сделал уже Зенон“ (Hegel, l. c., p. 326). Ту же мысль проводит Salinger в статье „Kants Antinomien und Zenons Beweise gegen die Bewegung“ (Arch. f. Gesch. d. Phil., Bd. 19); к сожалению, автор высказывает о математическом континууме и о методе анализа бесконечно малых совершенно неправильные суждения.

ница пространства" *). В антитезисе же утверждается, что ни одна сложная вещь в мире не состоит из простых частей, и доказывается это тем путем, что вопрос сейчас же сводится к пространству: „... пространство, занимаемое сложною вещью, должно состоять из стольких же частей, из скольких состоит сложная вещь. Но пространство состоит не из простых частей, а из пространств" **). Несколько ниже ***) читаем также: „... ни одна часть пространства не проста". Таким образом, эти строки „Критики чистого разума" свидетельствуют, что Кант, для которого пространство и время служили прообразом всякого континуума, отрицал его состав из простых неделимых частей. Что касается до аргументов в пользу такого мнения, то они выражены чрезвычайно кратко; надо полагать, что суть дела — в бесконечной делимости пространства: сколько бы мы ни подразделяли его на части, всегда будем получать новые, хотя и меньшие, пространства и никогда не дойдем до частей, уже не поддающихся дальнейшему делению: точек мы таким образом не получим.

Итак, математик берет неделимые элементы и, соединяя их в одно целое по известным законам, надеется получить континуум. Философы же возражают, что это — невозможно: с одной стороны, неделимые части ни в каком числе не могут дать хотя бы весьма малой величины; с другой — величина, обладающая бесконечной делимостью, не может быть разложена на неделимые части с помощью последовательных делений.

Последний аргумент был бы уничтожающим для тех, кто отрицает актуальную бесконечность. В самом деле, сторонники этого мнения принимают, что всякая вполне определенная совокупность должна состоять из конечного числа элементов; но в этом случае конечное число подразделений поведет к такому разложению ее на части, что каждая часть будет содержать лишь по одному неделимому элементу, и процесс разложения будет закончен. Но если данный объект обладает бесконечной делимостью, то указанный процесс никогда к концу не придет, и потому число

---

*) „Критика чист. раз.", стр. 272.
**) Ibid., стр. 271.
***) Ibid., стр. 275.

его простых элементов не может быть конечным. Для тех, кто допускает актуальную бесконечность, ничего ужасного в этом нет. Выше мы видели, что математические образы, которым приписывается непрерывность, как раз представляют собою бесконечные совокупности; если это вспомнить, то бесконечная делимость континуума становится вполне совместной с его построением из неделимых элементов: как бы далеко мы ни продолжали *последовательного* подразделения континуума, число частей всегда будет конечным, и мы никогда не получим его разложения на простейшие элементы, ибо число их — бесконечно. Однако, разложение на неделимые части дано иным способом, а именно — в силу самого закона его построения; здесь мы опять встречаемся с существенным свойством бесконечных совокупностей: их можно задать по содержанию, но не по объему.

Противники математического континуума менее склонны нападать на численный континуум, который они готовы признать за свободное создание человеческого ума; их ударам более подвергаются соответственные построения в области геометрии, так как здесь, говорят они, необходимо считаться с данными непосредственной интуиции; а она свидетельствует, что все сложно и делимо и ничто не просто. Но Рессель *) справедливо указывает, что если в одном случае бесконечная делимость считается совместной с неделимостью элементов, то уже нет *чисто-логических* оснований отрицать это и в другом. Что же касается показаний пространственной интуиции, то их нельзя считать безусловно непогрешимыми, и ее требованиям можно удовлетворить различными гипотезами. Геометрия строит свои непрерывные образы из неделимых элементов (точек) и достигает блестящих результатов.

Остается еще одно возражение против математического понятия континуума: неделимые части ни в каком числе не могут дать величины. Нам говорят, что если точка не имеет измерения, то каким же образом совокупности этих точек могут быть непрерывными образами, имеющими одно или более измерений? На такой геометрической постановке вопроса мы и остановимся, так как ее разрешение типично для всех случаев. Если мы говорим, что точки не имеют

---

*) Russell „The Principles of Mathematics", p. 460—461.

измерений, то под этим понимаем лишь, что они являются теми простейшими элементами, из которых создаются протяженные образы. Если мы будем брать произвольные совокупности точек, то, конечно, не всегда будут получаться непрерывные образы; очевидно также, что одной актуальной бесконечности мало, чтобы признать данную совокупность за континуум. Возьмем, напр., совокупность „рациональных" точек прямой, т. е. таких точек, расстояния которых от данной точки выражаются рациональными числами. Эта совокупность не только обладает актуальной бесконечностью, но у нее имеется еще свойство, в силу которого между каждыми двумя ее точками лежит бесконечное множество других ее точек; и все-таки такая совокупность точек не есть континуум. Здесь нехватает точек с расстояниями, которые *несоизмеримы* с принятой единицей, а ведь такие расстояния существуют; напр., диагональ квадрата со сторонами равными 1 измеряется числом равным $\sqrt{2}$. Кантор доказал, что совокупность рациональных точек — исчислима, а полный континуум обладает высшей мощностью. Таким образом, о континууме можно говорить лишь при определенной трансфинитной мощности. Многих философов можно обвинить в том, что они, говоря о континууме, не стараются дать такого же отчетливого определения этого понятия, которое дается в математике и отграничивает его от смежных понятий. Перейдем к этому математическому определению континуума.

Для того, кто знаком с современными воззрениями математиков, вопрос ясен: суть дела заключается в идее порядка, в тех отношениях, которые устанавливаются между элементами данной совокупности, выделяя ее тем самым из множества остальных. Если мы говорим, что отрезок или прямая имеют лишь одно измерение, то это значит, что названные образы являются простыми или однократными рядами точек.

В другом месте *) мы разобрали эту сторону дела подробнее и видели, что задача так называемых аксиом расположения и заключается в первом ответе на вопрос, как отрезок и прямая слагаются из отдельных точек. Аксиомы расположения определяют геометрические образы

*) „Вопросы обоснования геометрии", статья об идее порядка в геометрии.

как *слитные* ряды простейших элементов*); чтобы признать их *непрерывными*, математик должен постулировать еще дальнейшие свойства отношений; так, по методу Дедекинда прямая делается непрерывным рядом с помощью допущения, что каждое „сечение“ ее производится некоторой ее же точкой. Таким образом, совокупность элементов, не имеющих измерения, превращается в непрерывный ряд одного или более измерений в силу устанавливаемых между ними отношений; и здесь, как во многих других отделах математики, на первое место выступает идея порядка; она сообщает то единство множеству элементов, которое характеризует континуум; благодаря ей, целое получает свойства, отсутствующие у частей его.

Здесь мы опять подошли к самой сущности вопроса: непротяженные точки составляют протяженный отрезок, причем новое качество появляется у целого только в том случае, когда его элементарные части берутся в определенном количестве; мало того, чтобы их множество было бесконечным, — оно должно обладать определенной мощностью, именно по теории Кантора его мощность должна равняться $2^{\aleph_0}$. Это есть необходимое условие; остальное дают соотношения, устанавливаемые между неделимыми элементами.

Достаточно так формулировать вопрос, чтобы увидеть здесь проявление одного из основных законов диалектики, именно — закона перехода определенного количества одного качества в новое качество. Таким образом, те противоречия в понятии континуума, которые указал еще Зенон в глубокой древности, это — противоречия диалектические, коренящиеся в самой сущности предмета; они не только не уничтожают возможности познания непрерывного, но, сочетая неделимое и протяженное, дают ключ к математическому исследованию континуума.

Итак, утверждение, что континуум не может состоять из простых неделимых элементов, для своего рассмотрения требует прежде всего точного определения термина „континуум“; там, где оно дается (именно, в математике), это делается так, что его состав из отдельных элементов (чисел или точек) становится очевидным. От противников нужно

---

*) Ряд называется *слитным*, если между каждыми двумя его элементами имеются другие элементы.

требовать, чтобы свои возражения они обосновывали на таких же точных определениях. Одной интуиции, как показали новейшие математические исследования, здесь недостаточно.

С составом континуума из неделимых элементов необходимо считаться и при рассмотрении аргументов Зенона против движения *).

---

*) Кузэн справедливо указывает, что эти аргументы развиваются на фэне исключительной гипотезы множественности, которая, конечно, является исходной предпосылкой не самого Зенона, а противников элейского учения (Cousin „Nouveaux fragmens philosophiques“, p. 119).

III.

Всем четырем аргументам Зенона, подлежащим теперь нашему исследованию, понятие движения придает особенно наглядный, живой характер; отвлекаться всецело от названного понятия, как это делает Рессель, — значит лишать апории Зенона гениально выбранной формы, хотя суть дела поддается формулировке и независимо от механических терминов. Поэтому приступающему к рассмотрению этих аргументов неизбежно придется столкнуться с вопросом: что такое движение?

Основоположник современной механики Ньютон так отвечает на этот вопрос: „*Абсолютное движение* есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое, *относительное* — из относительного в относительное же"*). В этих словах главный упор сделан на различение „абсолютного" движения от „относительного", само же движение описывается просто как перемена места с течением времени. Здесь не затронут вопрос о том, чем движущееся тело отличается от покоящегося, если говорить об его отдельных положениях. А между тем в решении этого вопроса вся суть „стрелы" Зенона.

Если мы обратимся теперь к современному фолософу, стоящему на диаметрально противоположной позиции — речь идет о Ресселе — то получим такой ответ: „Движение состоит только в том, что в различные времена занимаются различные места, при условии непрерывности"**). Здесь

*) „Математические начала натуральной философии", пер. акад. А. Н. Крылова, стр. 30.

**) „The Principles of Mathematics", p. 473.

„перемещение" Ньютона заменяется статическим „занимание места".

Теоретическая механика в своей математической схеме движения также приходит к „статическим" воззрениям на движение. Пусть, напр., материальная точка совершает известное движение, и нам известны ее координаты как функции времени:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

Эти функции времени, стоящие в правых частях выписанных формул, обладают непрерывностью и однозначностью.

Отсюда следует, что для каждого определенного момента времени t получается вполне определенное положение точки (x; y; z) в пространстве. В этой схеме нет места таким утверждениям, как напр.: „движущаяся точка находится в данный момент в данном месте и не находится в нем", или: „движущаяся точка находится в одном месте и в то же самое время — в другом".

Проследим некоторые выводы, вытекающие из такой схемы движения. Если материальная точка, не меняя направления движения на обратное, перемещается по траектории, не имеющей двойных точек, то между всеми моментами времени, втечение которого совершалось движение, и точками пространства, образующими указанную траекторию, существует одно-однозначное непрерывное соотношение; сама материальная точка играет как бы роль посредника или средства, благодаря которому устанавливается это соответствие.

Если втечение некоторого промежутка времени различным моментам соответствуют различные точки пространства, то наша материальная точка, говорим мы, находится в движении; если же всем различным моментам времени соответствует одна и та же точка, то мы говорим о покое. Однако приходится иметь дело с различными движениями: одна и та же часть траектории может быть соотнесена с различными промежутками времени, что, заметим мимоходом, уже требует признания актуальной бесконечности. Поэтому для более полной характеристики данного движения необходимо прибегнуть к вспомогательным понятиям и, прежде всего, к понятию скорости. На последнее

Рессель смотрит как на известного рода фикцию, в том смысле, что скорость не есть свойство движущейся точки, присущее ей в данный момент независимо от остальных; напротив, скорость в данный момент есть предел средней скорости, т. е. она определяется поведением точки втечение известного промежутка времени, и в силу этого понятие скорости служит лишь для более полного описания движения. Само определение приводит сейчас к тому, что скорость покоящейся точки приходится считать равной нулю, а это в свою очередь ведет к понятию о мгновенном. покое, когда скорость в данный момент равна нулю, между тем как различным смежным моментам соответствуют различные положения точки в пространстве; так, напр., брошенное вверх тело находится во мгновенном покое в высшей точке своего пути. Таким образом, если взять две материальных точки, из которых одна обладает в данный момент скоростью, отличной от нуля, а скорость другой равна нулю, и если рассматривать эти моменты изолированно от смежных с ними, то, кроме неодинакового положения в пространстве, всякое различие между нашими точками исчезает. Различные скорости указывают лишь на различные движения обеих точек втечение ближайшего промежутка времени.

Изложенное воззрение на движение, изгоняющее всякий след „состояния движения", получает еще поддержку в четырехмерном мире теории относительности. Так Эйнштейн говорит, что физика из „происходящего" в трехмерном пространстве становится, в некотором смысле, „существующим" в четырехмерном мире*).

Такая статическая схема движения является естественным математическим отвлечением; но как всякое отвлечение, она не передает явления во всей его жизненности. Как говорит Ленин: „Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого"**).

Таким образом, изложенное воззрение на движение не решает вопроса о его сущности. Вопрос этот таит в себе значительные трудности, хотя мы, казалось бы, хорошо знаем, что такое движение. У многих опускались руки

---

*) „Принцип относительности", 1922 г., стр. 102.
**) Ленинский сборник XII, стр. 193.

перед его решением; так, Спенсер отнес сущность движения к области непознаваемого. Между тем вопрос о сущности движения резко ставится в 3-м аргументе Зенона, посвященном летящей стреле.

По Целлеру и приводимым им отчасти исправленным текстам, рассуждение Зенона рисуется так*): „Если какое-либо тело занимает равную ему часть пространства, то оно покоится; но летящая стрела в каждый данный момент занимает равную ей часть пространства, а потому покоится; следовательно летящая стрела на самом деле вообще неподвижна". Другие авторы**) не согласны с вышеупомянутыми исправлениями; они считают возможным сохранить и истолковать подлинный текст Аристотеля. По их мнению, содержание аргумента таково: „То, что занимает равное ему пространство, либо движется, либо покоится***); но летящая стрела в каждый данный момент занимает равное ей пространство, а так как втечение неделимого момента движение невозможно, то она покоится во все время своего полета". Какое бы толкование ни принять, сущность аргумента заключается в том, что отрицается возможность движения в каждый отдельный момент, и сюда присоединяется соображение, что последовательность положений покоя не может составить движения.

Философы, полемизировавшие с Зеноном, возражали против его разложения движения на отдельные моменты с определенным положением движущегося тела в каждый момент. Так, Гегель утверждал: „двигаться — это значит быть и в то же самое время не быть в данном месте"****); также Гербарт считал „стрелу" ошибочной на основании следующих рассуждений: о движущемся „совершенно невозможно утверждать, что оно где-либо находится во время движения, так как оно находится и более не находится в месте, из которого приходит, находится

*) Zeller, l. c., p. 598 — 599; см. также Diels, l. c., p. 131 (п. 27).

**) Dunan „Les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement" Paris 1884; Hamelin, „Sur un point du troisième argument de Zénon contre le mouvement" (L'année philosophique, t. 17); Noël, l. c.

***) Как указывает Hamelin (l. c., p. 43), сам Аристотель полагал, что в отдельный момент нет ни движения, ни покоя, — что покоя вообще не может быть втечение неделимой части времени. Зенон же был противоположного убеждения: из отсутствия движения он заключал к покою.

****) Hegel, l. c., p. 322.

и ещё не находится в месте, в которое вступает"*). Математик наших дней едва ли согласится с подобными утверждениями; но и среди философов они не встретили полного сочувствия: так, Целлер**) говорит: „если я спрашиваю, где находится летящая стрела в этот момент, то нельзя отвечать: в переходе из пространства A в пространство B, или — что то же самое — в A и B, но можно только сказать, что она находится в пространстве A". Сам Целлер, в согласии с Аристотелем, выясняет сущность аргумента так: в отдельный момент, как таковой, никакое движение невозможно; если же допустить, что время слагается из отдельных моментов, то движение станет вообще невозможным. Названный философ считает однако такое воззрение на природу времени противоречащим его непрерывности. Мы сталкиваемся здесь, в применении ко времени, с тем вопросом о составе континуума, который был разобран выше; современная точка зрения диаметрально противоположна аристотелевой, так что в нашем распоряжении не имеется такого простого выхода из зеноновой апории.

Прежде всего, мы не можем согласиться с утверждением, что летящая стрела в каждый данный момент находится в покое. Если нам только известно, что в момент t_0 материальная точка занимала определенное положение (x_0; y_0; z_0) в пространстве, и больше ничего не дано, то мы не можем сказать, покоится ли эта точка, или движется; так что в отдельно взятые моменты нельзя говорить о движении, равно как нельзя говорить и о покое. Если Гамелэн верно передает мысль Аристотеля, что в отдельный момент нет ни движения, ни покоя, то здесь великий философ древности обнаружил большую проницательность.

Поэтому сущность „стрелы" следует формулировать так: в каждый отдельный момент движущееся тело занимает вполне определенное положение — совершенно так же, как и тело покоящееся; если же в отдельные моменты между движущимся и покоящимся телом нет никакого различия, то каким же образом может появиться это различие в течение конечного промежутка времени, состоящего из отдельных моментов? Каким же образом возможно движе-

*) Herbart „Lehrbuch zur Einl. in d. Philos.", p. 201.
**) Zeller, l. c., p. 600.

ние? Бросается в глаза сходство этого вопроса с парадоксом континуума: каким образом непротяженные точки составляют протяженный отрезок? В случае движения тоже идет речь о пространственном и временном континуумах, связанных посредством движения некоторого тела. В обоих случаях гениальный философ древности вскрыл диалектическую природу основных понятий математического естествознания, отражающих реальные процессы. В частности, „стрела" вскрывает диалектические противоречия, заложенные в сущности движения: вполне определенные положения в отдельные моменты, взятые в актуально-бесконечном числе (мощности континуума) и связанные известными отношениями различия и последовательности, дают в целом новое качество — то самое „состояние движения", о котором так много говорилось и за и против.

Здесь уместно будет вспомнить следующие слова Ленина: *„Движение есть сущность времени и пространства. Два основных понятия выражают эту сущность: (бесконечная) непрерывность и «пунктуальность» (= отрицание непрерывности, прерывность). Движение есть единство непрерывности (времени и пространства) и прерывности (времени и пространства). Движение есть противоречие, есть единство противоречий."* *)

Только эти противоречия, которые заставили элеатов отрицать возможность движения, для нас, видящих в движении и в изменении вообще сущность явлений природы, являются доказательством диалектичности бытия и мышления. Только так и можно, по мнению автора, разрешить „стрелу": не опровергнуть эту апорию в обычном смысле слова, а перевернуть те выводы, к которым она приводила.

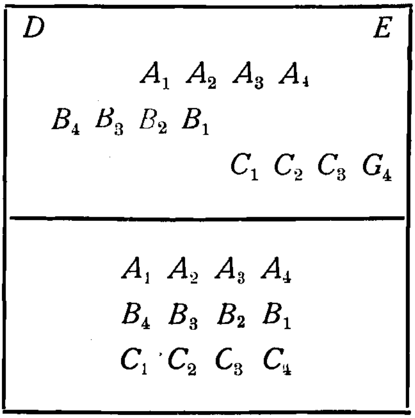
Если при рассмотрении „стрелы" мы встретились с понятием скорости, то 4-й аргумент Зенона — так называемый *„стадий"* — целиком основан на недостаточной разработанности этого понятия. Следует, впрочем, заметить, что, ввиду краткости дошедших до нас указаний, аргумент этот понимается различно. По Целлеру**) сущность его заключается в следующем. Пусть в части пространства *DE* (черт. 2) помещены три одинаковой величины ряда, со-

---

*) Ленинский сборник XII, стр. 191.

**) Zeller, l. c., p. 601—603; Diels, p. 132.

стоящие из равной величины тел *): $A_1 \ldots$ $B_1 \ldots$ $C_1 \ldots$; их взаимное расположение указано на верхней половине чертежа. Пусть ряд A остается неподвижным, а оба других с одинаковой и постоянной скоростью движутся параллельно ему, но в противоположных направлениях; по прошествии некоторого времени все три ряда придут в положение, изображенное на нижней половине чертежа. Таким образом, C_1 пройдет мимо всех B в то же самое время, в какое оно успеет пройти только мимо половины всех A, а ряд A занимает такое же пространство, как и ряд B. Но в случае равномерного движения время движения пропорционально пройденному пространству, так что промежуток



Черт. 2.

времени, потребный для прохождения ряда A, должен быть вдвое больше того, который нужен для прохождения его половины; между тем, выше мы видели, что эти промежутки равны, т. е. законы движения приводят нас к противоречию. Уже Аристотель **) указал на основной грех приведенного рассуждения: пройденный путь измеряется то

*) Аристотель употребляет здесь термин ὄγκοι. Спор между Целлером и П. Таннери (см. ниже) сводится к тому, следует ли понимать под этим словом тела или точки.

**) Diels, l. c.

по отношению к покоящемуся телу, то — по отношению к движущемуся; другими словами, здесь нет ясного понятия об относительной скорости. Целлер объясняет ошибку Зенона тем, что он был первым, рассуждавшим о законах движения во всей их общности и к тому же был заранее убежден, что натолкнется на противоречия.

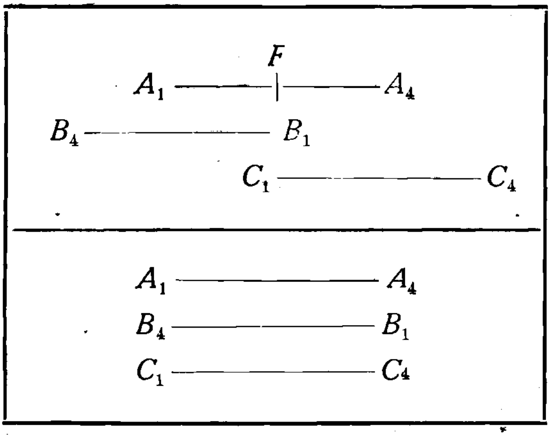
Однако не все согласны допустить у Зенона такую грубую ошибку; так, П. Таннери *) толкует разбираемую апорию совершенно иначе. По его мнению, с помощью „стрелы“ Зенон достаточно опроверг тех, кто утверждал, что в каждый данный момент движущееся тело находится в определенном месте, и теперь переходит к борьбе с учением, по которому каждый данный момент соответствует переходу из одного положения в непосредственно за ним следующее. При таком толковании в приведенном выше чертеже под A_1, B_1, C_1 и т. д. надо понимать отдельные точки **), образующие вполне упорядоченное множество, т. е. такой ряд, в котором для всякого элемента (кроме последнего) имеется элемент, непосредственно за ним следующий. Втечение времени, когда наши три ряда из первого положения переходят во второе, точка C_1 имеет по отношению к ряду A два перехода из одного положения в другое, непосредственно за ним следующее, а по отношению к ряду B — четыре таких перехода; таким образом, один и тот же промежуток времени состоит и из двух и из четырех моментов, что приводит к противоречию воображаемых противников Зенона. Целлер, полемизируя с Таннери, между прочим, указывает, что невероятно допустить существование во времена Зенона такого учения о движении. Судить об этом не беремся; нельзя, однако, не заметить одного обстоятельства, которое как будто бы говорит в пользу французского ученого: Зенон взял дискретные ряды отдельных масс, тогда как если бы он не имел в виду перехода из одного положения в непосредственно за ним следующее, то мог бы просто взять три непрерывных тела

---

*) P. Tannery „Le concept scientifique du continu“, Revue philosophique, t. XX, p. 393—394; такое же понимание 4-го аргумента находим в цитированной выше статье Noël'я и у Ресселя.

**) Таннери приписывает им известные массы, понимая под ними нечто в роде атомов или материальных точек; так что он не заслуживает упрека Целлера в неправильном толковании термина ὄγκοι.

одинаковой длины *), изобразив их, напр., в виде трех равных отрезков (черт. 3); тогда точка C_1 прошла бы мимо всего отрезка B_1B_4 в то же время, в какое она успела бы пройти только мимо половины отрезка A_1A_4, и т. д. Заметим, что если бы Зенон поступил так, как мы только что указали, то он мог бы натолкнуться на один из парадоксов, в которые впадает всякий, отрицающий существование актуально-бесконечных совокупностей. Дело в том, что во все время движения отрезков C_1C_4 и B_1B_4 на одной вертикальной линии с точкой C_1 всегда находится



Черт. 3.

по определенной точке отрезков B_1B_4 и FA_1, причем последний равен половине первого; таким образом, благодаря движению, получается однозначное соотношение между точками отрезков, из которых один вдвое больше другого. Быть может, нечто подобное Зенон имел в виду, если справедливо толкование в духе Целлера. Что же касается толкования Таннери, то здесь Зенон в сущности борется с допущением в пространственных и временных континуумах элементов, непосредственно следующих за данными. Такое допущение с современной точки зрения совершенно оши-

*) Именно так излагает 4-й аргумент P. Bayle в IV томе своего „Dictionnaire historique et critique", p. 539.

бочно; так как задолго до полного анализа понятия континуума ему уже приписывали свойство, по которому между каждыми двумя его элементами имеются еще элементы, так что нельзя говорить об элементе, непосредственно следующем за данным.

Как бы то ни было, „стадий“ не представляет для нас большого интереса: при одном понимании он содержит явную ошибку, при другом — борется с явно ошибочным утверждением.

Нам остается рассмотреть два первых аргумента Зенона, которые являются наиболее интересными и сильными. Один из них издавна носит имя „*Ахилла*“, другой обыкновенно называется „*дихотомией*“ в силу применяемого здесь повторного деления пополам. Но прежде чем перейти к ним, здесь уместно будет вспомнить еще об одном знаменитом парадоксе древности, а именно — о „*колесе Аристотеля*“ *). Пусть некоторая окружность катится по прямой таким образом, что развертывается на отрезке, равном ее длине. Возьмём другую окружность, концентрическую с первой и неизменно с нею связанную; эта окружность в свою очередь развернется на отрезке, равном тому, на котором развернулась первая окружность. Как же это может быть, чтобы две окружности различных радиусов развернулись на отрезках одной и той же длины?

Развитие механики выяснило, что катание окружности по прямой не сопровождается непременно равенством между длиной её дуги и тем отрезком, на котором последняя развертывается. Здесь особенно важно понятие скорости; с одной стороны — ее вспомогательная роль при описании движения, которая была выяснена по поводу „стрелы“; с другой — разложение скоростей составного движения. Механик скажет, что круг катится по прямой „без скольжения“, если во всякий момент скорость той его точки, в которой он в этот момент касается прямой, равна нулю; другими словами, указанная точка должна находиться в мгновенном покое. Небольшое вычисление показывает, что это будет только тогда, когда скорость поступательного движения центра равна произведению угловой скорости вращения на радиус. При таком соотношении обеих ско-

*) См., напр., Klügel „Mathematisches Wörterbuch“, Bd. IV p. 171—174).

ростей, окружность развернется на отрезке, равном ее длине; а при другом отношении этого уже не будет, что и замечаем на „колесе Аристотеля“.

Механик может одинаково рассматривать как такой случай катания окружности по прямой, когда скорость точки касания равна нулю, так и такой, когда эта скорость отлична от нуля. В обоих случаях в каждый отдельный момент прямая и окружность имеют только одну общую точку, и в различные моменты точки касания — различны. Но, в зависимости от скорости точки касания, окружность развертывается на отрезке, равном или неравном ее длине.

В конечном счете „колесо Аристотеля“ сводится к геометрическому парадоксу, заключающемуся в том, что в двух неравных окружностях оказывается одинаковое число точек: ведь обе они, точка за точкой, соотносятся с одним и тем же отрезком. К этому выводу можно притти и чисто геометрическим путем: проводя радиусы из общего центра, мы установим одно-однозначное соответствие между точками обеих окружностей.

С такими „парадоксами“ мы уже встречались; так, на черт. 1 мы убедились, что отрезок BA равномощен со своею частью BC; мы видели также, что совокупность всех вещественных чисел равномощна с промежутком от 0 до 1, и т. п. Во всех подобных случаях мы имеем дело с актуально-бесконечными совокупностями, а их существенное свойство состоит в том, что они оказываются равномощными со своими частями.

Таким образом, парадокс Аристотеля поставит втупик только того, кто свойства конечного множества считает обязательными для всякого множества.

IV

„Дихотомия“ и „Ахилл“, подобно другим аргументам Зенона против движения, имеют целью вскрыть различные противоречия, вытекающие из этого понятия, и тем самым отнять у него всякое реальное значение. Что касается их содержания, то относительно „Ахилла“ никаких сомнений не возникает: Ахилл, известный быстротой своего бега, никогда не догонит медлительной черепахи. Обосновывается это так: прежде всего Ахиллу нужно добежать до того места, где находилась черепаха, когда он только начал свой бег; но за это время и черепаха успеет несколько продвинуться вперед; когда Ахилл достигнет этого второго положения черепахи, она опять-таки отойдет от него вперед, хотя и на еще меньший кусок пути, и т. д.; так что черепаха будет всегда впереди быстрейшего бегуна Эллады.

С „дихотомией“ дело обстоит сложнее: сущность утверждений Зенона понимается различно. Исходное положение этого аргумента по Аристотелю *) состоит в том, что „движущееся тело, прежде чем достигнуть конечной точки своего пути, должно достигнуть его середины“. Пользуясь этим бесспорным положением, Целлер **), в согласии с древними источниками, строит такое рассуждение: для того, чтобы движущееся тело перешло от одной точки к другой, оно должно сначала совершить половину этого пути; но чтобы пройти половину, оно должно сначала пройти половину этой половины, т. е. четверть всего пути; но чтобы

*) Diels, l. c., p. 131 (см. пункт 25-й),
**) Zeller, l. c., p. 597.

пройти четверть пути, надо сначала пройти одну восьмую его, и т. д.; так как для всякой части пути можно говорить об ее половине, то процесс этот беспределен, и мы видим, что наше тело должно пробежать бесконечное число отдельных частей пространства; но оно не может этого сделать в конечное время, т. е. движение вообще невозможно. Бросается в глаза, что при таком истолковании „дихотомия" почти тожественна с „Ахиллом": и там и здесь долженствующий быть пройденным путь разлагается на бесконечное число частей, и затруднение состоит в том, что нельзя произвести синтеза этих частей в конечное время. Указанное сходство было подмечено и древними; так Аристотель *) видит различие обеих апорий лишь в различных способах деления на части рассматриваемого промежутка. Трудно допустить, чтобы это соображение ускользнуло от Зенона; если же принять, что он сознательно пошел на повторение, и все различие между „дихотомией" и „Ахиллом" — как утверждает Целлер — состояло в том, что в первом случае мы имеем дело с постоянной границей, а во втором — с подвижной, то для полной аналогии было бы естественнее в первом аргументе делить пополам *оставшуюся* часть пути: сначала тело должно пройти половину пути, потом опять половину оставшейся его части (т. е. четверть), потом половину оставшейся (т. е. одну восьмую), и т. д. до бесконечности. Основываясь на этом, было бы вполне в духе Зенона утверждать, что движущееся тело никогда не достигнет конца своего пути: на сколько бы оно ни продвинулось вперед, всегда оставалось бы нечто, отделяющее тело от его цели. Если бы, напротив, дело шло о том, чтобы выдвинуть в центр рассуждения именно бесконечность частей, то на ум читателя или слушателя можно было бы сильнее воздействовать при ином способе деления промежутка: разделим его пополам, потом *каждую* половину пополам, потом *каждую* четверть пополам, и т. д.; число частей возрастало бы значительно быстрее. Однако Зенон ничего подобного не делает; его способ деления таков, что он отодвигает все дальше и дальше ту часть пути, которая должна быть пройдена *первой*. Поэтому мы считаем правильнее понимание Гер-

---

*) Diels, l. c., p. 131 (см. п. 26).

барта *), по которому сущность „дихотомии“ заключается в том, что *движение не может начаться*: никакая часть пути не будет достаточно малой для того, чтобы быть первой, ибо от всякой части можно взять половину, и чтобы пробежать эту часть, нужно сначала пробежать ее половину. Как бы то ни было, на подобном толковании можно остановиться, так как с другим, все равно, придется встретиться при рассмотрении „Ахилла“.

Итак, мы примем, что в „дихотомии“ Зенон производит такое деление пути, что различные его части располагаются в последовательности прохождения их движущимся телом; при этом оказывается, что в полученном ряду нет первого члена, так что движение как будто бы не может начаться.

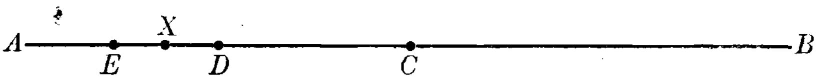
Со времен Аристотеля старались опровергнуть аргументы Зенона с помощью утверждения, что пространство и время, как и другие непрерывные образы, нельзя мыслить *разделенными* на бесконечное число частей: они только *делимы* до бесконечности **). Так, Целлер о доказательствах Зенона говорит: „Все они исходят из предположения, что данная непрерывная величина разложена на бесконечно многие части, и из этого предположения они выводят противоречия и нелепости, которые тотчас исчезают, если уяснить себе, что деление такой величины, именно вследствие ее бесконечной делимости, никогда не может достигнуть последней границы, — что число частей, на которые она разложена, никогда не может быть бесконечным, а всегда будет только конечным“. Несколько ниже приведенного места он прибавляет, что сказанное относится не только к пространству, но и к тому времени, втечение которого движется тело; поэтому, сколько бы мы ни дробили на части путь этого тела, то же самое можно сделать и с соответствующим промежутком времени, так что каждой части пространства будет отвечать известная часть времени ***). Против установления такого соотноше-

*) Herbart, l. c., p. 200; Noël, l. c., p. 108; Dunan, l. c., p. 30.

**) Zeller, l. c., p. 603—604; Diels, l. c., p. 131 (п. 25-й); Hegel, l. c., p. 313, 316.

***) На бесконечную делимость времени, которая вполне покрывает бесконечную делимость пространства, указывали также в своих замечаниях Декарт и Лейбниц (см. статью Dunan'a, p. 18), а также Ст. Милль (l. c., p. 522). Замечания эти были сделаны по поводу „Ахилла“, но по существу они направлены и против других аргументов Зенона, ния между частями пространства и времени спорить, конечно, не приходится: в этом заключается существенное свойство движения. Однако Целлер ошибается, думая, что на самом деле нельзя разложить часть пространства (напр.: прямолинейный отрезок) на актуально-бесконечное число частей. Конечно, если итти путем Зенона — путем последовательного деления пополам, — то достигнуть конца этого разложения никогда не удастся; но подобное возражение касается лишь той формы, в которую облечено деление промежутка в рассматриваемом аргументе. В действительности же можно разделить данный отрезок на актуально-бесконечное число частей, причем это будет как раз то деление, которое нужно Зенону.

Пусть речь идет об отрезке AB (черт. 4). В направлении от B к A разделим его на части так, чтобы 1-я (BC)



Черт. 4

равнялась половине AB, 2-я (CD) — четверти, 3-я (DE) — одной восьмой AB, и т. д.; словом, деление должно произвести так, чтобы всякая часть, непосредственно следующая за другой в направлении BA, равнялась ее половине, и чтобы совокупность всех частей вполне исчерпывала данный отрезок. Последний представляет собою не что иное, как известную совокупность точек; поэтому деление будет завершено, если для каждой точки отрезка AB будет указана та часть, которой она принадлежит; именно достаточно указать номер этой части. Мы условимся из двух точек, определяющих каждый частичный отрезок, только первую, т. е. его начало, относить к этому отрезку; а вторую, т. е. его конец или начало следующего отрезка, будем причислять к последнему. Условимся также обозначать длину отрезка AB через a; тогда та часть нашего отрезка, которая носит номер n, будет равна $\frac{a}{2^n}$. Положение любой точки X отрезка AB вполне определяется, если задано ее расстояние от точки B; это расстояние будем обозначать через x, так что $BX = x$.

Очевидно, что точка X тогда и только тогда принадлежит n-й части, когда x больше суммы длин первых $(n-1)$ частей (или равно ей) и меньше суммы длин этих частей плюс еще длина n-й части.

Первая сумма равна:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\ldots+\frac{a}{2^{n-1}}=\frac{a}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right\}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=a\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

а вторая получается отсюда путем прибавления $\frac{a}{2^n}$, так что она равна:

$$a\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Итак, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка X лежала в n-й части, заключается в неравенствах:

$$a\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\leqslant x<a\left(1-\frac{1}{2^n}\right). \qquad (*)$$

Это замечание позволяет указать простой прием для определения номера той части, которой принадлежит точка X; искомый номер есть целое положительное число n, удовлетворяющее неравенствам:

$$2^{n-1}\leqslant\frac{a}{a-x}<2^n; \qquad (**)$$

такое число n существует для всякого x, меньшего a, и единственно *). Прием этот основан на том, что неравенства (*) вытекают из (**).

Действительно:

$$2^{n-1}\leqslant\frac{a}{a-x} \qquad\qquad \frac{a}{a-x}<2^n$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\geqslant\frac{a-x}{a} \qquad\qquad \frac{a-x}{a}>\frac{1}{2^n}$$

$$x\geqslant a\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \qquad\qquad a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>x$$

что и требовалось доказать.

*) Оно находится с помощью конечного числа действий.

Таким образом, каждая точка отрезка AB попадает в одну и только в одну часть, и наша задача выполнена. Нетрудно доказать, что совокупность получаемых по изложенному способу частичных отрезков равномощна с совокупностью натуральных чисел, т. е., что для всякого натурального числа найдется отрезок, имеющий это число своим номером, и обратно: всякий отрезок имеет своим номером одно из чисел натурального ряда. В самом деле, если дано целое положительное число n, то соответствующая часть — n-ая по порядку, считая в направлении от B к A, и по величине равная $\frac{a}{2^n}$, найдется после n последовательных делений пополам отрезка BA в том же направлении; обратно, если дана какая-нибудь из тех частей, на которые разбит отрезок BA, то достаточно взять любую ее точку, чтобы по вышеизложенному способу найти соответствующее число натурального ряда — ее номер. Отсюда, между прочим, следует, что если перебирать эти части в порядке убывающей величины, в том самом порядке, в котором они следуют от B к A, то получается бесконечный ряд: в этом ряду не будет последнего члена, как его нет и в ряду натуральных чисел. Если теперь мы пожелаем мыслить части отрезка AB расположенными в обратном порядке, т. е. в направлении от A к B или в порядке возрастающей величины, то в этом ряду уже не будет первого члена. Мы снова пришли к основному положению разбираемого аргумента Зенона, причем теперь действительно осуществлено разложение пути на актуально-бесконечное число частей. Возражение Целлера и его единомышленников, таким образом, падает.

Ничего не дало бы для разрешения „дихотомии" указание, что, допуская бесконечную разделенность пространства, мы должны допустить и бесконечную разделенность времени; так что каждой из бесконечного множества частей пути будет соотнесена соответствующая часть времени *). Само по себе указание это — совершенно правильно; но оно, не разрешая зеноновой апории, в состоянии лишь ярко осветить ее сущность. Дело в том, что если мы соответственным образом разделим промежуток времени, втечение ко-

*) Такое указание делает Целлер (l. c., p. 604), исходя, впрочем, из иного понимания „дихотомии" (см. выше).

торого тело пробегает путь AB, то точно так же получим ряд частей, расположенных в порядке возрастающей величины, причем в этом ряду не будет первого члена.

Отсутствие первого члена в так называемом открытом ряду содержало бы в себе противоречие лишь в случае конечного числа членов: перебирая их попарно, мы непременно дошли бы до элемента, предшествующего всем остальным, который и был бы началом ряда. Но если считать законным понятие об актуально-бесконечных совокупностях, то указанное ограничение не является безусловно необходимым. Примеры рядов, не имеющих начала, мы видим в совокупности всех отрицательных целых чисел, расположенных в порядке возрастающей величины, а также в различных частях так называемых слитных рядов. Последние характеризуются тем, что между каждыми двумя их членами имеются другие члены, вследствие чего нельзя говорить об элементе, непосредственно следующем за данным; теперь стоит только взять совокупность членов слитного ряда, следующих за данным, чтобы получить ряд, не имеющий начала. В качестве примера можно привести любой арифметический или геометрический континуум, так как последний прежде всего обладает свойствами слитного ряда; действительно, берем ряд вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < 1$, и убеждаемся, что этот ряд не имеет первого члена. То же самое можно сказать о точках любой прямой, следующих за данной ее точкой в указанном направлении. *Представить* себе структуру подобных совокупностей мы не можем; но *мыслить* их и иметь о них достоверное знание — можем, как показывает пример анализа и геометрии.

Для нашей способности воображения затруднения усиливаются, если перейти ко времени. Тогда как элементы арифметических и геометрических образов могут сосуществовать и вообще даны независимо от течения времени, — промежуток времени, по самой сущности этого понятия, мыслится нами, как последовательность отдельных моментов; между тем, нет момента, непосредственно следующего за данным. Вот в этой-то „апории" и заключается суть первого аргумента Зенона. Пусть некоторая материальная точка до момента t_1 включительно покоилась, а потом пришла в движение; *указать первый момент движения мы не можем;* следовательно, говорит Зенон, движение не могло начаться, — оно вообще невозможно. Но что собственно, обозначают наши утверждения? „До момента t_1 включительно точка покоилась" — следовательно, различным моментам времени, предшествовавшим t_1, и самому этому моменту была соотнесена одна и та же точка пространства; „момент t_1 был последним моментом покоя, после чего началось движение" — следовательно, различным моментам времени, следовавшим за t_1, были соотнесены различные точки пространства. Указать среди этих моментов первый по порядку — мы не можем, да его и нет; тем не менее нет ничего противоречивого в указанном соотношении между элементами временного и пространственного континуумов. *Представить* себе подобное соотношение во всех подробностях действительно нельзя, но *мыслить* — вполне возможно, как это показывает пример теоретической механики.

Таким образом, в своем первом аргументе Зенон отрицал возможность движения, исходя, повидимому, из того соображения, что во всяком открытом ряду должен существовать первый член. Как мы видели, последнее мнение было бы неопровержимым, если бы принять, что всякая вполне определенная совокупность должна состоять из конечного числа элементов. Мнение это, однако, ошибочно, и понятие об актуальной бесконечности проливает свет и на рассматриваемую апорию, делая возможным существование ряда, не имеющего первого члена.

С Зеноном случилось здесь то самое, с чем приходилось встречаться и современным математикам. Исходя из обычных представлений о покое и движении, о переходе тела из одного состояния в другое, Зенон подверг их логико-математическому анализу и дошел до понятия о ряде, не имеющем начала, что, в применении к конечному времени, уже превосходило всякую способность представления. Точно так же математики новейшего времени, исходя из представлений об эмпирической кривой с определенной касательной в каждой точке, о движении точки с определенной скоростью и т. д., пришли к понятиям о непрерывности и производной; однако, указав строгое определение этих понятий, они получили следствия, уже ускользавшие от всякой возможной интуиции; назовем, например, *кривую Вейерштрасса*, не имеющую касательной ни в одной из своих точек *). Ошибка

*) Подробнее об этом см. „Вопросы и пр.", стр. 64 и след.

Зенона состояла в том, что из невозможности вообразить начало движения он заключил о невозможности самого движения и достоверного знания о нем; тогда как современные математики не считают интуицию единственным и безошибочным источником математических знаний и, при помощи основных понятий и законов рассудочного мышления, с успехом исследуют вопросы (в том числе и функцию Вейерштрасса), превосходящие силы нашей интуиции. Ошибка Зенона вполне объясняется уровнем математических знаний в его время и не уменьшает его заслуги *).

Мы должны признать, что в дихотомии Зенон указал на серьезные трудности, которые создаются для способности воображения понятиями континуума и движения; они связаны с самым существом понятия о бесконечности: к этому понятию, говоря определеннее — к понятию об актуально-бесконечных совокупностях, мы не можем подходить со всеми теми методами (напр., с заданием по объему), с которыми мы подходим к конечным классам. Это влечет за собою невозможность для нашей интуиции разобраться в некоторых вопросах, связанных с трансфинитными множествами. Однако в нашем распоряжении остаются другие методы (напр., определение по содержанию), при помощи которых мысль может овладеть вопросом; а потому следует самым решительным образом отвергнуть скептические выводы из аргументов Зенона. Математики давно уже привыкли к тому, что рассудок справляется с вопросами, перед которыми бессильна интуиция.

В конце концов, отвергая вывод Зенона о невозможности движения, даже более того — допуская возможность научного знания о нем, мы должны все-таки признать, что в „дихотомии" есть некоторый неразрешимый для нас остаток; речь идет о бесконечном ряде, не имеющем начала. Это — все та же диалектика бесконечности, которая получает особую остроту в применении к временному ряду. К последнему вопросу мы еще вернемся в связи с „Ахиллом".

---

*) Очень высокое мнение о „дихотомии" высказывает цитированный выше Dunan (p. 38 — 43), считая ее единственным твердо обоснованным аргументом из всех четырех. По его мнению, здесь доказано, что время, пространство и движение суть только данные представления и не имеют абсолютной реальности; т. е. Зенон посредством „дихотомии" установил не более и не менее, как основное положение Канта.

V

Содержание „Ахилла“ было изложено выше; связь этой апории с понятием актуальной бесконечности еще явственнее, чем у предыдущей. Как справедливо указывает Рессель *), она становится неразрешимой, если допустить, что часть не может быть равномощной целому. Действительно, если Ахилл догонит черепаху, то путь, пройденный последней, составит часть пути, пройденного Ахиллом; между тем, оба эти отрезка равномощны, как совокупности одновременных положений обоих бегунов. Мы признаем законным понятие об актуальной бесконечности; а потому нам необходимо поставить обратный вопрос: что может дать это понятие для разрешения „Ахилла“, и разрешает ли оно его до конца?

Прежде всего формулируем математически задачу Зенона. Пусть точки A и $Ч$ (представляющие собою Ахилла и черепаху) равномерно перемещаются по одной и той же прямой в одном и том же направлении, причем $Ч$ находится впереди A на расстоянии, равном a; пусть A перемещается с постоянною скоростью, равною единице скоростей, а $Ч$ — движется в k раз ($k > 1$) медленнее; спрашивается, когда и где A догонит $Ч$. Так как мы имеем дело с равномерным движением, и скорость A равна 1, то путь, пройденный этой точкой, численно равен протекшему времени; таким образом, на оба поставленных вопроса ответ получается одновременно. Задачу эту можно решать различными способами. *Во-первых*, можно исходить из понятия об относительном

*) Russell, l. c., p. 350, 358.

движении. В самом деле, абсолютное перемещение A и $Ч$ в пространстве для нас безразлично; важно лишь разделяющее их расстояние, т. е. их относительное положение. Поэтому можно допустить, что $Ч$ находится в покое, а A движется со скоростью, равною $\left(1-\frac{1}{k}\right)$; тогда, если через z обозначить промежуток времени, втечение которого A догонит $Ч$, то

$$z=a:\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{ak}{k-1}.$$

Во-вторых, легко составить уравнение, если за неизвестную принять z — путь, пройденный A до соединения с $Ч$ (это же число даст нам и соответственный промежуток времени). Действительно, точка $Ч$ пройдет тогда отрезок, равный $(z-a)$, и так как она движется в k раз медленнее, то

$$\frac{z}{z-a}=k, \text{ откуда } z=\frac{ak}{k-1}.$$

В-третьих, можно применить метод Зенона, т. е. разлагать искомый отрезок или промежуток времени на бесконечно-большое число беспредельно убывающих частей и пытаться найти искомую величину путем синтеза всех этих частей. Для того чтобы A догнало $Ч$, первой точке необходимо прежде всего достигнуть исходного положения $Ч$, т. е. пройти путь, равный a; но втечение этого времени точка $Ч$, двигаясь в k раз медленнее, тоже продвинется вперед на отрезок, равный $\frac{a}{k}$; тогда A, преследуя $Ч$, должно пройти прежде всего этот отрезок $\frac{a}{k}$; но в это же время $Ч$ продвинется вперед на расстояние, равное $\frac{a}{k^2}$, и т. д. Таким образом, путь, который должна пройти точка A, разлагается на такую бесконечную последовательность частей:

$$a, \frac{a}{k}, \frac{a}{k^2}, \frac{a}{k^3}, \dots\dots\dots \qquad (1)$$

Так как $k>1$, то здесь получается бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, и мы можем говорить о ее сумме.

Обозначив ее через z, имеем:

$$z = \frac{a}{1-\frac{1}{k}} = \frac{ak}{k-1}.$$

Заметим, что вычисление z по 3-му способу основано на понятиях предела и бесконечно-малой величины.

Из всех этих способов Зенон, без сомнения умышленно, выбрал тот, который связан с бесконечным процессом; по его методу, путь Ахилла разлагается на бесконечное число частей, и так как последовательный синтез этих частей никогда не может завершиться, то отсюда делается заключение о невозможности для Ахилла догнать черепаху, т. е. о противоречивости понятия движения вообще.

То обстоятельство, что точка A стремится к цели, которая сама находится в движении, не является связанным необходимым образом с существом рассматриваемого аргумента. В самом деле, первый способ решения задачи, основанный на понятии относительного движения, показывает, что она равносильна другой, где дело идет о достижении неподвижной границы; вероятно, нечто подобное имел в виду Целлер, утверждая, что „если быстрее движущемуся телу невозможно догнать движущееся медленнее, то вообще невозможно достигнуть указанной цели...“. Основываясь на этих соображениях, возможно наряду с „Ахиллом“ поставить другой парадокс, который был уже намечен выше: движущаяся точка никогда не пройдет данного отрезка, ибо сначала она должна пройти его половину, потом половину оставшейся половины (т. е. четверть), потом половину оставшейся четверти (т. е. одну восьмую), и т. д. без конца. Здесь путь, предстоящий точке (назовем его через b), разлагается на такие части:

$$\frac{b}{2}, \frac{b}{2^2}, \frac{b}{2^3}, \ldots; \qquad (2)$$

получается снова бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, и ее сумма равна:

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = b.$$

Бросается в глаза полная тождественность математической природы обоих парадоксов: и там и здесь путь точки является суммой бесконечного ряда; и там и здесь, как бы далеко мы ни шли в последовательном синтезе частей пути, всегда останется некоторый, хотя и сколь угодно малый отрезок, который еще должна пробежать движущаяся точка.

На понятии суммы бесконечного ряда основана и критика „Ахилла" в логике Минто *). Для простоты там положено $a = 100$ саж. и $k = 10$, так что путь Ахилла разлагается в бесконечный ряд, которого сумма равна $111^1/_9$ саж. По мнению Минто, рассуждения Зенона доказывают лишь, что Ахилл не догонит черепахи, пока не пробежит расстояния, равного сумме указанного ряда. Поэтому греческий философ обвиняется в *ignoratio elenchi*: „софист хочет доказать то, что Ахилл никогда не догонит черепахи, а на самом деле доказывает только то, что Ахилл перегоняет ее между 111 и 112-й саженями их пути". Однако, существо рассуждений Зенона, как было установлено выше, и заключается в том, что движущееся тело не может пробежать пути, состоящего из бесконечного числа частей, ибо невозможен последовательный синтез бесконечного множества объектов. Что суть дела именно в этом, вытекает из рассмотрения другого равносильного Ахиллу парадокса, где речь идет о пробеге определенного пути с неподвижной границей. Нам кажется, что Минто просмотрел указанную сторону вопроса, и его возражение само может послужить примером *ignoratio elenchi*. Эвелен **) о подобных рассуждениях совершенно правильно говорит, что мы спрашиваем о том, *как* возможна встреча Ахилла с черепахой, а нам отвечают, как если бы мы спрашивали, *когда* она возможна.

Были, конечно, и другие попытки разрешить разбираемую апорию. Так, со времен Аристотеля некоторые философы в своих возражениях исходили из понятия о бесконечной делимости континуума. Такую критику находим, например, у Целлера, и то, что у него направлено против „Ахилла", по существу не отличается от того, что напра-

---

*) Минто „Дедуктивная и индуктивная логика", (2-е изд.), стр. 288—239. См. также Dunan, l. c., p. 22—23.

**) Evellin „Infini et Quantité", p. 71.

влено против „дихотомии“; Целлер даже формулирует свои возражения сразу по адресу обоих аргументов (надо припомнить, что это еще оправдывается его пониманием „дихотомии“). С такой точки зрения прежде всего сошлются на *потенциальную* бесконечную делимость континуума, отрицая возможность мыслить последний как уже разделенный на *актуально* бесконечное число частей. На это можно ответить тем, что, как и в случае „дихотомии“, на самом деле указать подобное разложение. Если мы для простоты возьмем не самого „Ахилла“, а другой упомянутый выше и равносильный ему парадокс, то нужное нам деление всего отрезка в вполне законченном виде было указано в предыдущей главе; теперь его части расположены в порядке убывающей величины, так что между ними нет последней, а это именно и требуется для второго аргумента Зенона. Если же противники сдадут указанную позицию и скажут, что бесконечной разделенности пространства соответствует, во всяком случае, и бесконечная разделенность времени и что, таким образом, каждой части пространства будет соотнесена определенная часть времени, то мы согласимся с таким утверждением, но добавим, что оно ничего не объясняет: идет ли дело о пространстве или времени, мы одинаково не в состоянии совершить последовательный синтез бесконечного числа делимых или неделимых частей, на которые разложен данный континуум *). Более того, рассматриваемый аргумент Зенона и проявляет всю свою силу, когда мы прилагаем его рассуждения именно к промежутку времени: здесь приходится иметь дело с протекшей бесконечностью отдельных моментов.

Предполагаемая недопустимость последнего понятия, как было указано выше, положена Кантом **) в основу доказательства тезиса 1-й антиномии: „Но бесконечность ряда именно в том и состоит, что он никогда не может быть закончен путем последовательного синтеза. Следовательно, бесконечный протекший ряд в мире невозможен“...

*) Неоднократно было уже указано, что ссылка на бесконечную делимость времени, которая в состоянии покрыть таковую делимость пространства, не меняет дела, ибо пространство и время дают место одинаковым трудностям (см., напр., Dunan, l. c., p. 19).

**) „Критика чистого разума“, стр. 266.

Итак, в основе 2-го аргумента Зенона лежит мысль, которая потом повторяется в антиномиях Канта, а именно — мысль о невозможности завершить бесконечный ряд путем последовательного синтеза. С этой предпосылкой необходимо согласиться, ибо она указывает существенное свойство актуально-бесконечных совокупностей: выше мы видели, что элементы таких совокупностей не могут быть пересчитаны. Но прежде чем делать отсюда какие-либо выводы, необходимо вспомнить, что *если нельзя определять бесконечных совокупностей по объему, то остается еще путь определения по содержанию, который позволяет нам иметь о них достоверное знание*; вот этой-то второй возможностью и пренебрегает разбираемая апория.

Действительно, я не могу последовательно рассмотреть все бесконечное число частей, на которые Зенону было угодно разбить путь Ахилла; но я могу охватить все их одним понятием и высказать о *любой* из них определенное суждение (напр., определить ее величину).

Существует мнение, что исчисление бесконечно-малых, всецело основанное на теории пределов, вообще разрешает зеноновы апории *); мы не считаем возможным согласиться с этим. Во-первых, надо заметить, что не одна лишь теория пределов решает задачу; выше были указаны и совершенно элементарные пути для ее решения. Нет сомнения, что и Зенон сумел бы найти искомую часть пространства или времени; едва ли он сомневался, что в мире эмпирической действительности Ахилл догонит черепаху; но анализ понятия движения, по его мнению, вскрывал внутреннюю его противоречивость, а потому и заставлял отрицать за ним высшую, метафизическую реальность. Во-вторых, мы полагаем, что присоединение методов теории пределов к рассуждениям Зенона ничего в них по существу не меняет. Рассмотрим, в самом деле, что дает нам здесь эта теория. Идет ли дело о ряде (1) или (2), сумма членов его — назовем ее S — есть предел S_n, т. е. суммы n первых членов ряда, при возрастании n до бесконечности; так как члены обоих рядов положительны, то при всяком n имеем: $S_n < S$. Следовательно, хотя разность $(S - S_n)$ можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа, она всегда сама будет числом положительным, т. е. ни-

---

*) См., напр., Виндельбанд, l. c., стр. 58.

какое значение переменной S_n не окажется равным ее пределу S. Но ведь это — как раз то самое утверждение, которое делает Зенон: как бы далеко мы ни шли в последовательном синтезе пути Ахилла из его частей, мы никогда полностью этого пути не получим. Если допустить, что вычисление по способу пределов вполне решает вопрос, т. е. считать законным скачок от S_n к S, то надо быть последовательным и допустить такое же рассуждение в применении к „дихотомии"; тогда от рассмотрения беспредельно убывающих частей $\frac{a}{2^n}$ мы перейдем к их пределу, т. е. к нулю, и скажем, что первая часть пути равна нулю: другими словами, будет доказано, что движение не начнется *).

Рассмотрение знаменитой апории Зенона привело нас к вопросу о достижении переменной своего предела. Здесь интересно будет сопоставить мнение математиков новейшего времени с мнением одного из создателей анализа бесконечно-малых. Ньютону было чуждо представление о математике, как о чисто формальной науке; но он не уклонялся от постановки общих вопросов; он говорил, что в делах „философских необходимо отвлечение от чувств" **).

Начнем с вопроса, как смотрят современные математики на приближение переменной к пределу: *достигает ли она своего предела, или нет?* При определении понятия о пределе, мы можем, как известно, итти двумя различ-

---

*) Mouret в статье „Le problème d'Achille" (Revue Philos., t. XXXIII), критикуя книгу Frontera („Etude sur les arguments de Zénon contre le mouvement", Par. 1891), упрекает его в том, что он от ряда переходит к его пределу, не замечая скрытой здесь действительной трудности, подмеченной Зеноном. Однако, дальнейшие рассуждения автора показывают, что он и сам, стоя на старой точке зрения „компенсации ошибок", не вполне правильно представляет себе методы анализа бесконечно-малых. Loewe, соглашаясь в своей статье „Ueber die Zenonischen Einwürfe gegen die Bewegung" (Abhandl. d. Königl. böhm. Gesellschaft d. Wiss., VI Folge, I Bd.) с критикой Аристотеля, говорит по поводу затронутой в нашем тексте попытки следующее (p. 31): „существование предела никогда не оспаривалось, а оспаривалось только то, что движение когда-либо его достигнет. Вышеуказанные ряды тем менее доказывают противное, что предел никогда не получается с помощью действительного суммирования". Evellin, позиция которого была уже отмечена, делает подобное же замечание о пути Ахилла, представленном в виде суммы бесконечной прогрессии („Infini et Quantité" Paris 1880, p. 73—74).

**) „Начала", стр. 32.

ными путями. Именно, можно за исходную точку взять общее определение предела; тогда бесконечно-малое число определяется как переменная, которой предел равен нулю. Можно итти и обратным путем: начать с определения бесконечно-малой, а потом уже говорить, что x стремится к пределу, равному a, если разность $x - a$ есть число бесконечно-малое. Во всяком случае, оба определения (предела и бесконечно-малой) тесно связаны между собой; следовательно, поставленный выше вопрос о достижении переменной своего предела можно высказать и так: причисляется ли нуль к совокупности значений бесконечно-малого числа, или нет? В качестве ответа мы можем привести авторитетное мнение академика А. А. Маркова: „Важно заметить, что к совокупности значений бесконечно-малого числа мы не причисляем его предела нуль" *). Следовательно, здесь вопрос решается в пользу недостижения предела. Математики не всегда уделяют особенное внимание затронутому сейчас вопросу; но вот Мансион счел нужным написать небольшую статью, посвященную „определению слова предел" **). Статья начинается с определения Дюгамеля, которое, по мнению Мансиона, явным или неявным образом разделяется почти всеми современными авторами; вот оно: „Пределом переменной мы называем постоянную величину, к которой переменная неопределенно приближается, никогда ее не достигая (sans jamais l'atteindre)". Не менее решительно высказывается и Фрейсинэ ***), который видит отличительное свойство предела, как математи-

---

*) Проф. А. А. Марков „Дифференциальное исчисление" (литографированные лекции 1898 г.), стр. 42. В „Известиях Академии наук" (1916 г., № 2) напечатан „Доклад Комиссии по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе". В этом докладе (стр. 72) читаем: „Точно также многие авторы, для удобства, не причисляют к совокупности значений бесконечно-малого числа его предел нуль". Затем следует ссылка на академика А. А. Маркова и на Бертрана (Bertrand „Traité de Calcul Différentiel", p. 1). Слова первого были приведены выше; у второго же находим определение бесконечно-малой, как такой переменной, которая неограниченно уменьшается и сколь угодно близко подходит к нулю, никогда его не достигая.

**) P. Mansion „Mélanges mathématiques" (Gand 1882), 2-me partie, p. 29—34. На этих страницах помещена статья „Définition du mot limite", извлеченная из журнала „Mathesis" t. I, p. 193—198.

***) Ш. Фрейсинэ „Очерки по философии математики" (изд. журн. „Образование", 1902), стр. 40.

ческого понятия, именно в том, что переменная не может его достигнуть.

Косвенным подтверждением мнения Мансиона о согласии большинства авторов с его определением может служить обычное высказывание о бесконечно-большом числе, как об имеющем своим пределом бесконечность. В самом деле, в этом случае, собственно говоря, никакого предела нет, и само утверждение имеет лишь условный смысл (в интересах краткости речи); применять же и здесь слово „предел“ считается позволительным потому, что и в тех случаях, когда пределом служит определенное число, подразумевается, что переменная своего предела не достигает. Итальянский ученый Пеано даже считает целесообразным при помощи подстановки: $x = a + \frac{1}{x'}$ приближение переменной x к пределу a всегда сводить к *беспредельному* возрастанию переменной x' *); а это уже свидетельствует о недостижении предела.

Однако последнее заключение может показаться слишком поспешным, так как можно указать примеры, в которых переменная получает значения, равные ее пределу; такие примеры приводятся в упомянутой выше статье Мансиона; но стараясь стать на совершенно элементарную точку зрения, он главным образом берет прерывные функции **), тогда как для нас здесь именно важно говорить о функциях непрерывных. Поэтому остановимся лучше на известном пределе:

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} \cdot \sin x) = 0.$$

Так как наша функция обращается в нуль всякий раз,

---

*) Peano „Sulla definizione del limite d'una funzione“ (Rivista di Matematica, vol. II, p. 77—79). Подобным же образом поступают и те, которые представляют совокупность значений переменной в виде вполне расположенного бесконечного ряда:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots x_n,\ \ldots\ldots;$$

здесь уже x_n есть функция от n, и $\lim x_n = a$ при $n \to \infty$.

**) Наиболее интересный пример Мансиона состоит в рассмотрении переменной:

$$x = \frac{n - 2E\left(\frac{1}{2}n\right)}{n},$$ где $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ и $E\left(\frac{1}{2}n\right)$ обозначает

когда $x = k\pi$, где k — целое число, то она неограниченное число раз получает значение, равное ее пределу.

Подобные примеры как будто бы свидетельствуют о том, что из самого определения следует исключить слова о недостижении предела; так, напр., полагает Тодгентер в своем „Дифференциальном исчислении" *), но Мансион с ним не согласен. Дело в том, что переменная в таких случаях обыкновенно выражается через другую, уже независимую; закон изменения последней дан, и имеется некоторое значение — ее предел, которого эта переменная не может достигнуть в силу самого определения (в приведенных примерах это особенно ясно, так как переменная независимая там беспредельно возрастала). И вот невозможность для переменной независимой достигнуть предела заставляет „метафорически" сказать, что и переменная зависимая не может достигнуть своего предела; на переменную зависимую переносится то, что, строго говоря, верно лишь для переменной независимой. Понимать это, по нашему мнению, надо так, что число, представляющее предельное значение

наибольшее целое число, заключающееся в $\frac{1}{2}n$. Легко видеть, что x получает значения $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7} \ldots$

„Все геометры", — говорит Мансион, — скажут, что при неограниченном возрастании n переменная x имеет пределом 0; между тем наша переменная достигает этого значения неограниченное число раз".

*) См. Todhunter „A treatise on the Differential Calculus" (1901), §§ 13 и 14. Здесь идет речь о пределе функции, и на примере:

$$\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = 1$$

выясняется, что бывают случаи, когда функция в действительности никогда своего предела не достигает. Однако, автор считает более подходящим не устанавливать указанного ограничения, так как в других случаях дело обстоит иначе; напр., если возьмем выражение:

$$\frac{x}{x+1},$$

то оно равно $\frac{1}{2}$ при $x = 1$, и на основании общего определения можно утверждать, что $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}$. Ясно, что в подобных примерах функция достигает предела лишь в той мере, в какой это доступно для переменной независимой; а потому остаются в силе соображения Мансиона.

функции, рассматривается с двух различных точек зрения: функция может проходить через это число, как через одно из своих частных значений, но, как предел, оно остается недостижимым для нее, поскольку недостижимо для переменной независимой соответственное предельное значение. В частности, функция $e^{-x} \cdot \sin x$ при неограниченном возрастании x бесчисленное множество раз переходит через 0, как через одно из своих частных значений: за обращением ее в нуль всякий раз следуют значения, отличные от нуля. Но этот же самый нуль, как завершение ее изменений (как предел), остается для нее недостижимым, хотя бы потому, что функция к нему приближается при *беспредельном* возрастании переменной независимой.

Мансион дает для своей теории одно геометрически-механическое истолкование, которое не можем не отметить в интересах дальнейшего. Пусть y есть непрерывная функция от x:

$$y = f(x), \tag{**}$$

и пусть:

$$\lim_{x \to a} [y] = b;$$

так как a является числом для x недостижимым, то точка (x, y), пробегающая кривую (**), никогда не достигнет ее точки, заданной координатами (a, b). Легко видеть, что в этом примере Мансион воскрешает дух апории Зенона об Ахилле, не могущем догнать черепаху.

Итак, большинство современных математиков держится убеждения, что *переменная своего предела не достигает*. По крайней мере, это убеждение высказывается постольку, поскольку речь идет об основах исчисления бесконечно-малых.

Если теперь обратимся к Ньютону, то в 1-м издании „Начал" найдем небольшое колебание в пользу только что изложенного учения; так, к словам о „моментах" было там прибавлено, что полное уничтожение до известной степени несовместимо с их постоянным возрастанием или убыванием *), т. е. здесь автор колебался отнести к совокупности

*) „Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento", (цитирую по M. Cantor'y, „Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik", Bd. III, p. 273). Кантор сосредоточивает все свое внимание на споре о первенстве между Ньютоном и Лейбницем, вследствие

значений бесконечно-малого числа его предел, равный нулю. Но уже во 2-м издании приведенные слова были выпущены, и это — совершенно понятно; мысль о недостижении переменной своего предела находилась бы в полном противоречии с общими воззрениями Ньютона. Действительно, единой переменной независимой является абсолютное время, которое течет равномерно и достигает всякого предуказанного момента, если только он отделен от нас конечным промежутком. Все же другие переменные суть функции времени и притом — функции непрерывные (по крайней мере, именно такие переменные являются для нас наиболее интересными и важными); отсюда уже недалеко до признания, что всякая переменная *с течением времени* достигает своего предела. Полное свое выражение такое воззрение Ньютона получает в 1-й лемме отдела, посвященного „методу первых и последних отношений". Приводим дословно это предложение, причем самый конец его даем в переводе, более близком к подлиннику *):

„*Количества, а также отношения количеств, которые в продолжении любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, делаются наконец равными*".

Мы видим, какое существенное значение приобретает время в способе пределов: изменение величин должно протекать в продолжении конечного промежутка времени, и

чего и выпуск указанных слов во 2-м издании рассматривает под тем же углом зрения. Нам кажется, что на это можно посмотреть иначе.

*) В предисловии к переводу „Начал" (стр. VIII) акад. А. Н. Крылов говорит, что старался дать возможно точный перевод; тем не менее местами он значительно отклоняется от подлинника, оговаривая и объясняя свои отклонения в примечаниях; большинство из них вызвано существенной разницей между современной терминологией и той, которая была общепринятой во времена Ньютона. Оставляя эти случаи в стороне, мы должны сказать, что в других местах можно было сохранить более близкий перевод, так как он лучше передавал бы оттенки мыслей автора и вполне допускался свойствами русского языка. В частности, изложенная особенность перевода сказалась и на лемме 1; в подлиннике она кончается словами: „fiunt ultimo aequales" (цитирую по лондонскому изданию „Principia" 1726 г.), которые на русский язык переданы так: „будут в пределе равны". Мы считаем нужным сохранить дословный перевод: „делаются наконец равными", так как именно такая формулировка характерна для Ньютона; она подчеркивает все отличие его мысли от современной теории пределов.

известная разность должна сделаться менее наперед заданного числа до истечения этого промежутка; за то, когда указанный промежуток истек, — наши величины совпали, и общий предел достигнут. В последующих леммах нет явной ссылки на время; но так как все доказательства покоятся на лемме I, то и для всего последующего время не теряет своего исключительного значения.

В следствиях леммы III Ньютон рассматривает некоторые геометрические переменные и совершенно ясно высказывает, что они совпадают со своими пределами в конце изменения.

Итак, Ньютон, руководствуясь опытом и понятием об абсолютном времени, утверждал, что с течением времени всякая переменная достигает своего предела: несомненно Ахилл догонит черепаху. Нельзя сказать, что Ньютон опроверг апории Зенона; он просто не желает считаться с такими рассуждениями, и его опора в том — истинная природа времени, этой единственной и всеобщей переменной независимой. Для науки последствия такого освобождения от тяготевшей над древностью зеноновой диалектики были огромны.

Понятия о бесконечно-малом и бесконечно-большом не были совершенно чужды древним; но они избегали непосредственно применять их под влиянием критики элейской школы, против которой были бессильны; заменой подобных рассуждений служил обходный путь „метода исчерпывания" *). Наоборот Ньютон, стоя на противоположной точке зрения, дерзнул на указанных понятиях построить математику и механику; успех его был блестящий: он проник в сокровенные тайны строения мира.

Было бы в высшей степени любопытно узнать, как сам Ньютон относился к аргументам древнего философа; но на этот счет нам не удалось получить какого-либо указания. Но если бы перед Ньютоном развить искушения Зеноновой диалектики, то — думается нам — он ответил бы приблизительно так: переменная достигает своего предела, — так происходит в действительности, и так оно должно быть в силу истинной природы времени, этой абсолютной переменной независимой; но как это происходит, каким образом

*) M. Cantor „Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik" (2 Aufl.) Bd. I, p. 238.

здесь завершается бесконечный ряд, — эти вопросы оставим в стороне: „Hypotheses non fingo!"

Конечно и Зенон, как всякий человек, живущий в мире эмпирической действительности, неоднократно наблюдал, как „Ахилл догоняет черепаху". Внешние чувства свидетельствовали ему об этом, повидимому, с полной достоверностью; но разум, раскрывая внутренние противоречия, связанные с понятием движения, низводил в его глазах эти наблюдения на степень простого обмана чувств. Возражение Диогена, начавшего ходить перед философом, развивавшим аргументы Зенона против движения, еще древними считалось слабым именно потому, что дело шло о сущности движения, а не об его видимости*). *Противоречия, которые Зенон видел в понятий движения, объясняются свойствами бесконечных совокупностей, присущими исключительно им в отличие от совокупностей конечных.* Так, в предыдущей главе было выяснено, что „дихотомия" основана на особенностях актуально-бесконечных рядов, в силу которых у них может и не быть *первого* члена; в „Ахилле" выступает на первый план возможное отсутствие *последнего* члена. Родственность этих случаев была определенно указана Энгельсом: „Ясно следующее: бесконечность, имеющая конец, но не имеющая начала, не более и не менее бесконечна, чем та, которая имеет начало, но не имеет конца" **). Оба признака могут и сосуществовать, например, у ряда вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < 1$, или у ряда моментов времени, протекающих между полуднем и первым ударом часов.

Основываясь на подобных соображениях, Бэйль ***) говорит: „если бы час содержал в себе бесконечное множество частей, он никогда не мог бы ни начаться, ни кончиться". Однако мы полагаем, что час содержит бесконечное множество моментов, и этот час истек; следовательно, на наших глазах завершилась бесконечная последовательность момен-

*) Этот спор между философами описан в остроумном стихотворении Пушкина „Движение"; оно заканчивается словами:

„Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однакож прав упрямый Галилей".

**) „Анти-Дюринг" (3-е изд. 1923 г.) стр. 62.
***) Bayle. I c., p. 539.

тов. Кант отрицал безначальность мира на том основании, что при таком допущении до настоящего момента протекла бы вечность, т. е. завершился бы бесконечный ряд моментов; он упустил из вида, что с математической точки зрения такое же самое затруднение представляет любой истекший час, истекшая минута и вообще всякий конечный промежуток времени. Все эти „апории" получают особенную силу именно в применении ко времени, ибо к существенным признакам времени относится последовательность отдельных моментов.

Итак, мы видели, что Зенон и Ньютон стояли на диаметрально противоположных точках зрения в разбираемом вопросе. В новейшее время, уточняя основные понятия и положения анализа, мы удалились от Ньютона; логическое усовершенствование способа пределов вновь привело к торжеству Зеноновых апорий; только слова: „*Ахилл не догонит черепахи*" на современный язык перевели так: „*переменная не достигает своего предела*".

Кто же в конце концов прав в этом споре? По нашему мнению, ответ может заключаться только в том, что противоположные высказывания названных великих мыслителей вскрывают диалектическую природу понятия о пределе. Действительно, если переменная стремится к некоторому пределу, то она пробегает бесконечный ряд значений; если же последний бесконечен и не имеет конца, то как же он завершится? Как произойдет последовательный синтез отдельных этапов изменения? Выходит, что переменная не может достигнуть своего предела. Но если мы обратимся к реальному миру, то увидим, что прав Ньютон: на наших глазах переменные сплошь и рядом достигают своих пределов в конечный промежуток времени. Блох, в своей книге о Ньютоне, прекрасно выразил это положение дела словами: „*Природа постоянно осуществляет пределы, которыми пользуются геометры и которые для них никогда не являются действительно достигнутыми*"*).

С поразительной проницательностью Зенон вскрыл эти противоречия в понятии предела, — противоречия, обусловленные неизбежным привхождением актуальной бесконечности. Ошибка Зенона состояла в том, что он заключил отсюда о невозможности движения и множественности вещей.

*) Bloch „La Philosophie de Newton" (Paris 1908), p. 83.

Учение Г. Кантора об актуальной бесконечности, все развитие современной математики и механики вырвали это жало у апорий Зенона и антиномий Канта, доказав нашу силу в познании объективной действительности. Никто теперь не станет доказывать невозможность движения и научного знания о нем; но надо все-таки признать, что в апориях Зенона есть неразрешимый до конца остаток. Этот остаток заключается во вскрытых им противоречиях, присущих понятиям бесконечности и предела. Но здесь мы имеем дело не с формально-логическими противоречиями, а с диалектическими, т. е. — с противоречиями, коренящимися в самой сущности предмета. Поэтому они не подрывают возможности всякого знания, а делают наоборот эти понятия пригодными для познания диалектически развивающейся действительности.

Ответств. редактор Г. В. Пулькина. Ректор В. Д. Фиминтн.
Сдана в набор 3/XII 1933 г. Бум. листов $1\frac{1}{4}$. Подписана к печати 13/III 1934 г.
Формат $82\times111\,{}^1/_{32}$. ГТТИ № 335. Тип. зн. в 1 бум. л. 157.796.
Ленгорлит № 1064. Тираж 3000 — авт. л. 5. Заказ № 1835.

1 р. 75 к.

Т—25-5-4

-35